Facultad de Humanidades,
Ciencias Sociales y de la Salud

¨ MATEMÁTICA ¨

Departamento de Matemática

Carreras:
Lic.en Administracion y C.P

CURSO: 1º AÑO

Año: 2016

GUIA TEORICO-PRACTICA I

CONTENIDOS

1.1 PROPOSICION

Estudiaremos brevemente un lenguaje no contradictorio ni ambivalente que nos permitirá introducirnos a la Matemática: la **Lógica** Matemática, que se ocupa de las argumentaciones o razonamientos válidos.

Lógica proposicional:

En la lógica proposicional consideraremos dos elementos básicos: *Proposiciones*, *Conectivos*.

Proposición:

"Definiremos proposición como aquellas expresiones lingüísticas que poseen una función informativa: afirman o niegan algo, y tiene sentido decir de ellas que son verdaderas o falsas, pero no ambas a la vez.."

Ejemplos:

(a) Gabriel García Márquez escribió Cien años de Soledad.

(b) 2 es un número primo.

(c) -3 – 2 = 5

(d) -1 es un numero entero, pero 2 no lo es.

Nota: Una proposición es una oración, pero no toda oración es una proposición.

Las siguientes no son proposiciones:
(a) x + y > 5
(b) ¿Te vas?
(c) Compra cinco azules y cuatro rojas.
(d) ¡Que suerte! ¡Casi me saco el monobingo!

En general, **No son proposiciones**, las siguientes expresiones:

a) Las oraciones interrogativas, Imperativas o exhortativas, desiderativas, exclamativas o admirativas y las dubitativas.

b) Las funciones proposicionales. Ej. $2x + 6 = 14$

Simbolización:

El lenguaje de La LÖGICA es el ***lenguaje simbólico***.

Las proposiciones las denotamos por letras minúsculas *p*, *q*, *r*, etc..
Desde el punto de vista lógico carece de importancia cual sea el contenido material de los enunciados; solamente interesa su valor de verdad.

Valor de Verdad:

Al valor de verdad de una proposición p (cualquiera) la notaremos con: $\mathcal{V}(p)$

Si la proposición ***p*** es falsa, tendrá un valor de verdad: $\mathcal{V}(\boldsymbol{p}) = F$ (falsa).

Ejemplos:

p: “Mozart fue un gran compositor” (proposición verdadera) $\mathcal{V}(p) = V$

q: “ 9 es un número primo” (proposición falsa) $\mathcal{V}(q) = F$

CLASE DE PROPOSICIONES:

Pueden ser **simples** (o atómicas) y **compuestas** (o moleculares)	
Proposición simple	Ejemplo: “Daniel tiene dengue”
Proposición compuesta	Cuando se niega una proposición simple o cuando se combinan mas de una proposición simple mediante términos de enlace (conectivos lógicos)

Ejemplo:

“La Música es mi pasatiempo favorito y Mozart fue un gran compositor”

En este texto hay 2 proposiciones que las designaremos con las letras **p** y **q :**

p: La música es mi pasatiempo preferido conectivo: “**y**”

q: Mozart fue un gran compositor

CONECTIVOS LOGICOS:

Los términos "y" , "no" , "o" , "si...entonces" y "si y solo si" , que se pueden presentar en una proposición compuesta son llamados CONECTIVOS LOGICOS.

Las operaciones o los **conectivos lógicos** se representan **simbólicamente** con los signos: **$\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,** [1]
En el cuadro siguiente se presentan todos los conectivos lógicos, el nombre que reciben y su identificación o significado en un ejemplo junto a la forma simbólica, suponiendo que se tengan dos proposiciones p y q .

Conectivo	Operac. Asociada	Ejemplo	fórmula
$\sim$, $\neg$	Negación	1 no es un número primo	$\sim p$
$\wedge$	Conjunción	2 es un número par y es primo	$p \wedge q$
$\vee$	Disyunción incluy	$\sqrt{25}$ tiene por raíz -5 o 5	$p \vee q$
$\underline{\vee}$	Disyunción excluy.	$-(-2)^2$ es positivo **o** negativo	$p \underline{\vee} q$
$\Rightarrow$	Condicional	**Si** el triángulo es equilátero **entonces** es isósceles	$p \Rightarrow q$
$\Leftrightarrow$	Bicondicional	Un número entero es par **si y solo si** es divisible entre 2	$p \Leftrightarrow q$

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen junto con la forma en que están conectadas.

<u>Tabla de Verdad:</u>

P
V
F

Es una disposición que permite asignar a cada variable proposicional (proposición) valores de verdad(V) o (F) .
Si es 1 la proposición, se tendrán 2 valores posibles (2 renglones)
Si se presentan 2 **diferentes**, se tendrán 4 combinaciones posibles de valores de verdad. Para 3 proposiciones, se tendrán 8 combinaciones posibles.
En gral para **n** proposiciones diferentes: $p_1, p_2, \dots, p_n$, se tendrán $\mathbf{2^n}$ valores de verdad posibles.

<u>NEGACION</u>: (~)
Para una proposición cualquiera **p** verdadera, su negación **~p** es Falsa y recíprocamente.
Ejemplo: p: “El Pentium es un microprocesador”
~p: “El Pentium no es un microprocesador”

P	**~p**
V	
F	

<u>CONJUNCIÓN:</u>.

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos conjunción de ambas a la proposición compuesta “p y q” y la notaremos p ^ q. Esta proposición será verdadera únicamente en el caso de que **ambas proposiciones** lo sean.

Ejemplo

“La lógica y la matemática son ciencias formales.”

[1] *Notación simbólica usada por Scholz .*

Donde: p: *La lógica es una ciencia formal.*

q: La matemática es una ciencia formal.”

Una forma de escribir o de operar puede ser:

$$\begin{array}{ll} & p: VVFF \\ \wedge & q: VFVF \\ \hline & p \wedge q: VFFF = VF_3 \end{array}$$

Otra es usando la tabla de valores de verdad. Completa:

p	q	p ∧ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

DISYUNCIÓN

Disyunción incluyente(débil):

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos disyunción de ambas a la proposición compuesta: “**p** o **q**” y la notaremos **p** ∨ **q**.

Esta proposición será verdadera si al menos una de las dos p, o q es verdadera.

$$\begin{array}{ll} & p: VVFF \\ \vee & q: VFVF \\ \hline & p \vee q: VVVF = V_3F \end{array}$$

Ej.: *Raúl esta escribe poesías o escucha música instrumental*

Disyunción excluyente (fuerte):

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos disyunción exclusiva de ambas a la proposición compuesta “O **p** o **q**” , pero no ambas” y la notaremos:
p $\veebar$ **q**.
Esta proposición será verdadera si **una u otra**, pero **no ambas**, son verdaderas.

Se podría operar de la forma: $p \veebar q = (VVFF) \veebar (VFVF) = FVVF = FV_2F$

Ej.:*Cecilia esta en el ciber o en la Universidad* “

CONDICIONAL (p ⇒ q)

Dadas dos proposiciones p y q, a la proposición compuesta “si **p**, entonces **q**” se le llama “proposición condicional” y se nota por **p ⇒ q .**
A la proposición “p” se le llama antecedente, hipótesis, premisa o condición suficiente y a la “q” consecuente, tesis, conclusión o condición necesaria del condicional.

Ej. : “*Si 2+2 < 8 entonces 2 < 8”* condicional de tipo formal

donde: p: “2+2 < *8”* , q: “2 < 8*.”*

Simbólicamente**:** p ⇒ q *(Proposición verdadera)*

El condicional es **verdadero** en cualquier caso **excepto** cuando el antecedente es **V** y el consecuente es **F**.
Una forma de operar sería: $p \Rightarrow q = (VVFF) \Rightarrow (VFVF) = VFVV = VFV_2$ O bien:

$$\begin{array}{ll} & p : VVFF \\ \Rightarrow & q : VFVF \\ \hline & p \Rightarrow q : VFVV = VFV_2 \end{array}$$

Nota: Otras formulaciones equivalentes de la proposición condicional p ⇒ q , son:

"q si p" , "q cuando p".
"p es una **condición suficiente** para q".
"q es una **condición necesaria** para p".
"q se sigue de p".

CONDICIONALES ASOCIADOS (Conjugados)

Dado un condicional de antecedente p y consecuente q (que se toma como directo), es posible armar otros condicionales a partir de éste por permutación y /o negación de p y q .

Estos reciben el nombre de condicionales **asociados** o **conjugados** del primero:

Condicional Directo **p ⇒ q**   **q ⇒ p** Condicional Recíproco

Condicional Contrario ~**p** ⇒ ~**q**   ~**q** ⇒ ~**p** Condicional contrarrecíproco

Ejemplos:
*"Si la cotización del dólar sube, disminuye el ingreso de las importaciones" (*directo)

"Si el ingreso de las importaciones disminuye, la cotización del dólar sube"

(recíproco)

BICONDICIONAL (p ⇔ q)

Dadas dos proposiciones p y q, a la proposición compuesta "p si y sólo si q" se le llama "proposición bicondicional" y se nota por **p ⇔ q**

Ejemplo: *"Una función es continua cuando y solo cuando la función es continua en cada uno de sus puntos"* **

El bicondicional, solo **es verdadero** si **ambas** proposiciones tienen el **<u>mismo</u> valor** de verdad.

$$p \Leftrightarrow q = (VVFF) \Leftrightarrow (VFVF) = VFFV = VF_2V$$

Nota: El bicondicional puede definirse también como la conjunción de un condicional y su recíproco. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

A- EJERCICIOS PROPUESTOS

1- Indica cuales de las siguientes expresiones son proposiciones.
En el caso afirmativo señala además cuales son compuestas y cuales atómicas:

a) “En el mes de febrero del 2012 el Hospital regional se vio colapsado por los accidentes.
y la atención del mismo no fue la óptima.

b) ¡ Prohibido obstaculizar con motos la senda peatonal

c) “Si el peatón cruza la esquina por la senda peatonal, el vehiculo se detiene .”

d) “Podrían parar las estaciones de servicios en Santiago en semana santa.”

2- Identifique las proposiciones simples y expréseilas en lenguaje lógico utilizando para ello los conectivos que correspondan.

i- La función identidad es una función lineal pero no es una parábola..

ii- Tanto la suma como el producto de números reales son tienen neutro.

iii- Cuando Pedro llegue al trabajo, será notificado de las ultimas novedades o se encargará de las tareas del día, o ambas a la vez.

iV- El tiempo es relativo o absoluto.

3- Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones compuestas:

a) La beca que recibe el alumno es nacional o universitaria o ambas a la vez.

b) Se le enviara el GPS por correo mañana o pasado.

c) El estado le traspasa los servicios de transporte al gobierno de la ciudad y el decreto

es sin subsidios o con fondos de la coparticipación.

d) El afiliado jubilado puede optar por el IOSEP o por PAMI, pero no ambos.

4- Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p_1: El Intel 7 es un microprocesador.

p_2: Es falso que el Pentium sea un microprocesador.

p_3: $2 + 2 = 5$

p_4: Es falso que $2 + 2 = 5$

p_5: $2 + 2 = 4$

5- Sean p, q y r las proposiciones “El auto esta registrado en Bs As” , “El último digito de la patente es par”, y “El auto esta inhibido”

Expresar en forma coloquial las siguientes proposiciones dadas en forma simbólica.

(a) $q \Rightarrow p$.
(b) $\sim q \Rightarrow r$.
(c) $r \Rightarrow (p \vee q)$.

6- Sean las proposiciones

p : Está haciendo calor. q : Iré a la finca. r : Tengo tiempo.

Escribir, usando conectivos lógicos, una proposición que simbolice cada una de las afirmaciones siguientes:

(i) Si no está haciendo calor y tengo tiempo, entonces iré a la finca.

(ii) Iré a la finca sólo si tengo tiempo.

(iii) No esta haciendo calor.

(iv) Esta haciendo calor, y no iré a la finca.

7- Completa la tabla siguiente, de acuerdo a las definiciones dadas:

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

8- Construir la tabla de verdad de la proposición $\sim (p \wedge \sim q)$.

9- En las siguientes condicionales identifica el antecedente del consecuente :

i) Si las tasas de interés se mantienen fijas, los clientes podrán ampliar sus créditos.

ii) El número 432 es múltiplo de 6 puesto que es divisible entre 2 y entre 3.

iii) Carlos aprobara el parcial y podrá regularizar si estudia tres horas por día.

iv) La huelga continua, pues no hay solución al conflicto.

10- Dado el condicional :

Si la inflación de octubre del 2015 en el país fue del 2,9% , en Mendoza fue del 3,5 %

Escribe coloquial y simbólicamente los condicionales asociados

11- Escribir el reciproco y el contrarrecíproco de cada una de las siguientes:

(a) Si llueve en santiago, no voy a clase.

(b) Me quedo a estudiar, sólo si tú te vas de la casa.

(c) Si tienes cien pesos, entonces podrás comprar las cartillas de la UNSE.

(d) No puedo completar la respuesta si no me ayuda el profesor particular.

FÓRMULAS LÓGICAS

Una fórmula lógica es una cadena de símbolos construida según **reglas** establecidas por el lenguaje de la Lógica desde un punto de vista formal, es decir, lo único que le interesa son las relaciones entre los símbolos. En ese sentido la sintaxis lógica, permite la construcción de Fórmulas Bien Formadas (FBF) estableciendo con tal objeto, reglas para usar y combinar símbolos.

Ejemplo: *Samuelson no es contador, sino economista; luego dicta cátedra.*

Forma lógica: Samuelson no es contador y Samuelson es economista entonces dicta cátedra

p: *Samuelson es contador*

q: *Samuelson es economista*

r: *Samuelson dicta cátedra.*

Fórmula lógica: $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ Fórmula bien formada (FBF)

Algunas de las reglas de la sintaxis lógica que permiten construir o identificar una FBF:

i - Una FBF tiene un nombre y esta depende de su operador de mayor jerarquía.

ii - El operador de mayor jerarquía es aquel que esta libre de los signos de agrupación: ( ), [ ]

iii- Los signos de agrupación se usan cuando la fórmula es susceptible de doble interpretación.

iv- Un conectivo u operador afecta a las letras proposicionales inmediatas o a algún conjunto de letras y símbolos inmediatos a ellos entre paréntesis.

v – **Jerarquía:** A los efectos de reducir el uso de los ( ) como así también de poder construir una tabla de verdad para evaluar una fórmula dada, se conviene en establecer el siguiente orden de los operadores (de la mas débil a la mas fuerte)

- NIVEL1 $\sim$
- NIVEL2 $\wedge$, $\vee$
- NIVEL3 $\Rightarrow$
- NIVEL 4 $\Leftrightarrow$

La fórmula dada en el ejemplo es un **condicional**. Para obtener su **valor de verdad**, construimos una tabla de verdad con tantos renglones según posibilidades de combinación de V o F por cada variable, y tantas columnas según proposiciones y conectivos estén presentes:

<u>Tipos de fórmulas:</u>

Si el resultado obtenido en la ultima columna de tabla es siempre **Verdadero**,

la fórmula se llama **Tautología**. si es **Falso** la fórmula se llama **Contradicción**.

Y si es al menos una es F y una es V la fórmula recibe el nombre de **Contingencia.**

En el ejemplo dado tenemos una contingencia.

p	**q**	**r**	**$\sim p$**	**$\sim p \wedge q$**	**$\sim p \wedge q \Rightarrow r$**
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

En cambio la formula: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ es una **tautología**. Observa la tabla:

p	**q**	**$\sim p$**	**$p \Rightarrow q$**	**$\sim p \vee q$**	**$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$**
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

LEYES LÓGICAS

Existen fórmulas cuyos resultados de los valores de verdad son iguales para una misma forma de asignación de los valores de las variables proposicionales.

Diremos que las proposiciones compuestas son lógicamente **equivalentes** y las simbolizaremos con $\equiv$ o con $\Leftrightarrow$, cuando ambas tengan el mismo valor de verdad.

Estas fórmulas se conocen como **Leyes lógicas** y alguna de ellas son:

i. Involutiva: $\sim(\sim p) \equiv p$

ii- Conmutativa: de la conjunción y de la disyunción:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \equiv q \vee p$

iii- Asociativa: de la conjunción y de la disyunción

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $\qquad$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

iv- Distributiva: $\wedge$ con respecto a la $\vee$ y de la $\vee$ con respecto a la $\wedge$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\qquad$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

v- Leyes de De Morgan:

$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ $\qquad$ $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

vi- Del condicional: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

vii- Negación de un condicional (No es lo mismo que el contrario)

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

B- EJERCICIOS PROPUESTOS

12- Indica cuales de las siguientes fórmulas no están bien expresadas o formadas. Aquellas que no lo sean, explica por que no lo son:

a) $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow \sim r}$

b) $\mathbf{p \wedge (q \vee \sim r)}$

c) $\mathbf{p \vee q \wedge r}$

d) $\mathbf{p \Rightarrow q \sim r}$

13- Una *empresa privada y el ministerio de desarrollo de energía participan en el desarrollo económico del país, pero el ministerio no tiene fundación.*

i- Si llamamos con **p** , **q**, etc. , a cada una de las supuestas variables proposicionales que intervienen, indica cual es la fórmula lógica correcta, de las opciones siguientes:

a) $\mathbf{p \wedge q \wedge \sim r}$

b) $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow \sim r}$

c) $\mathbf{p \wedge q \wedge \sim q}$

d) $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow \sim q}$

ii- Si tuvieses que construir una tabla de verdad para esta fórmula lógica. ¿Cuántos renglones tendría?

iii- Supongamos se sabe que en la fórmula d: **p** es V , **q** es F , ¿se puede saber el valor de verdad de la proposición compuesta?

iv- Evaluando todas las posibilidades, ¿Que tipo de fórmula es?

14- Analiza el tipo de formula lógica usando tablas de verdad:

a) $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p)$

b) $\sim(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \Rightarrow p)$

c) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow \sim q$

d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

e) $p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow q)$

15- Reducir las siguientes fórmulas, aplicando las leyes lógicas en forma conveniente:

a) $\sim (p \vee \sim q) \equiv$

b) $\sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv$

c) $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \equiv$

d) $\sim (p \Rightarrow q \wedge r) \equiv$

e) $\sim [p \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv$

16- Sin usar tablas de verdad, demuestre que $p \vee [(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow p \vee q$

1.2 FORMA O FUNCIÓN PROPOSICIONAL

Existen expresiones que "*parecen*" proposiciones, pero no lo son. Tienen uno o más sujetos que cumplen una determinada propiedad. Ejemplos:

" x es un número par " ; " $x + y < 2000$ " ; " $x > 3 \wedge x < 5$ " ,

" x obreros preparan un paro y un piquete en la ruta 9 ".

No son **proposiciones** puesto que no esta definido el o los sujetos a que hace referencia la propiedad y no se puede saber si es verdadera o falsa la expresión.

Son **Formas proposicionales**

> Se denomina *forma proposicional* o *función proposicional*, a una expresión que contiene una o más indeterminadas que, al ser reemplazadas por elementos de un conjunto fijado (dominio de la variable) se transforma en una *proposición.*

Se simboliza con **: P(x) , Q(x), P(x,y) , R(x,y,z) , etc**

donde **x, y, ..** son las **indeterminadas**

La construcción de proposiciones requiere la definición previa de un dominio de términos posibles que le llamaremos **U** , Universo de la función proposicional (conjunto de valores posibles que sustituyen a la/s variable/s o indeterminadas".

Ejemplo: $U = \{ 1, 2, 3, 4\}$ universo de discurso

p(x) : x es par

forma proposicional donde x está indeterminada y puede tomar los valores del conjunto fijado U, así:

si x = 1, p(x) se convierte en: p(1) :"1 es par" **proposición** falsa

si x= 2, p(2) : "2 es par" **proposición** verdadera

Las formas proposicionales pueden ser simples o compuestas dependiendo de la presencia de conectivas.

Ejemplo: " $x > 3 \wedge x < 5$ " lo podemos expresar como: $P(x) \wedge Q(x)$ (prop. compuesta)

Supongamos que el universo de los elementos de x sea: U = Z (números enteros)

Si x = 2, la función se convierte en una proposición falsa pues: $2 > 3 \wedge 2 < 5$

Si x = 4 da únicamente proposición verdadera (es el único caso)

Como interesan las proposiciones verdaderas deberemos precisar **otro conjunto** que esté incluido en el Universal y que contenga **los valores verdaderos**. Definimos

<u>CONJUNTOS DE VERDAD</u>:

Es un **subconjunto** del Universal formado por los valores que hacen verdadera la proposición al ser sustituidos en la/s indeterminada/s, de la función proposicional.

Se simboliza con letras mayúsculas : P , Q, etc.

En el último ejemplo el conjunto de verdad de la función $P(x) \wedge Q(x)$ es : $\{ 4 \}$

Cuantificadores:

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación usando términos que expresen ideas del total del conjunto U en el cual estén definidas o bien una parte del mismo.

Existen dos tipos de cuantificadores:

Universal (general) y **Existencial** (particular)

A su vez cada uno de estos puede ser afirmativo o negativo.

Cuantificador Universal :

Las funciones proposicionales (en una indet.) se cuantifican universalmente cuando le asociamos a la indeterminada x expresiones como**:**

¨Para todo ¨ ,¨ Cualquiera ¨, ¨Cada ¨ . Simbólicamente: $\forall$ x : P(x)

Se lee ¨ **Para todo x se verifica P(x)**¨

Ejemplo:Sea

P(x) *: "x es alumno de 1er año de la carrera de C P N que cursa matemática"*

Considerando: *U* = {alumno de 1er año de la carrera de CPN }

Una cuantificación de P(x) es :

¨ ***Todo*** *alumno de la carrera de C. P. N. de 1º año cursa matemática* ¨

Simbólicamente: $\forall$ x : P(x)

Cuantificador Existencial :

Una forma proposicional se cuantifica existencialmente cuando le asociamos a la indeterminada x expresiones como **:**

¨Existe al menos¨ , ¨Algunos¨, etc. Simbólicamente: $\exists$ x / P(x)

Se lee**: ¨ Existe al menos un x tal que ¨**

Para el ejemplo dado:

"***Algunos*** *alumnos de la carrera de C.P.N. de 1º año no cursan matemática* ¨

Simbólicamente: $\exists$ x / ~ P(x)

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

Observa el siguiente ejemplo:

" todos los números racionales son números reales" proposición V

Simbólicamente: $\forall$ x : P(x)

Si negamos esta expresión resulta: ~[$\forall$ x : P(x)]

"No todos los números racionales son números reales" proposición F

O de otra forma **equivalente**:

"**Algunos** números racionales no son números reales"

Simbólicamente: $\exists$ x / ~ P(x)

Ahún cuando los cuantificadores utilizados son diferentes, el valor de verdad en ambas es el mismo.

La negación de un cuantificador universal es equivalente a una cuantificación existencial con la propiedad de x negada. Y a su vez:

La negación de los cuantificadores existencial es equivalente a un cuantificador universal con la proposición negada

Es decir, en forma simbólica, para una función preposicional P(x) cuantificada Universalmente y existencialmente, en forma respectiva, es:

~[$\forall$ x : P(x)] $\equiv$ $\exists$ x /~ P(x) **~ [$\exists$ x / P(x) es V] $\equiv$ $\forall$x: ~ (Px)**

Ejemplo:

Todos los artículos de la canasta familiar han aumentado

Negación $\rightarrow$ **Existe algún** artículo de la canasta familiar que no ha aumentado.

Ejemplo:

Algún argentino debe al menos una tarjeta de crédito.

Negación $\rightarrow$ **Todos** los argentinos **no** deben una tarjeta de crédito.

C- Ejercicios propuestos:

17- Simbolizar las siguientes formas proposicionales y determinar sus respectivos conjuntos de verdad:

a) U = N ; $x - 5 < 8$ b) U = Z ; $3 - x = 6$

c) U = N ; $x^2 = 25$ d) U = R ; $x^2 + 2 = 38$

18- Sea U = { 1; 2; 3; 4 } el conjunto universal. Determine el valor de verdad de cada enunciado:

a) $\forall x : x + 3 < 6$; b) $\forall x : x^2 - 10 \leq 8$;

c) $\exists x : x^2 > 1 \Rightarrow x + 2 = 0$; d) $\exists x : 2x^2 + x = 15$.

19- Escriba en forma simbólica las siguientes estructuras lógicas, usando cuantificadores e identificando las funciones proposicionales que intervienen.

i) *Algunos comerciantes expenden bebidas alcohólicas después de las 23 hs*

ii) *Algunas fábricas no pueden competir con las importadoras.*

iii) N*ingún comestible ha bajado de precio y alguno no se consigue.*

iv) No todos los estudiantes tienen un método de estudio. Por lo tanto algunos estudiantes no obtienen buenos resultados.

20- Niegue las funciones proposicionales del ejercicio anterior en forma simbólica y coloquial.

21- Dado el conjunto universal U = { x / x es un número. dígito } y las funciones proposicionales:

a) $p(x) : x \leq 9$ *b)* $q(x) : x > 9$ *c)* $r(x) : x < 7$

i) Encontrar el conjunto de verdad correspondiente a cada función proposicional.

ii) ¿Se puede encontrar proposiciones falsas para algún valor del Universal?

iii) **Cuantificar** cada función para que resulte una proposición V.

22- Analiza el valor de verdad de las siguientes funciones proposicionales cuantificadas. Luego niega cada una de ellas.

a) $\forall x \in Z$: " x es par" U= Z

b) $\exists\, x \in Z$ / " x es primo e impar" U= Z

c) $\exists\, x \in D$ / " no es función par o no es impar"

U = D= conjunto de todas las funciones escalares

23- Niegue en forma simbólica y coloquial las formas proposicionales de los ítems a y b. Obtenga el contrarrecíproco del condicional c

a) $\forall x : (p(x) \wedge q(x))$

b) $\exists\, x / (p(x) \vee \sim q(x))$

c) $\sim[\forall x : p(x)] \Rightarrow \exists\, x / q(x)$

Cuestionario

1- ¿Qué condiciones debe cumplir una expresión lingüística para que sea considerada una proposición?

2- ¿Qué expresiones linguisticas no constituyen ejemplos de proposiciones?

3- ¿Es una ley un ejemplo de proposición?¿Por que?

4- ¿Cómo se clasifican las proposiciones?

5- ¿Qué diferencia existe entre las proposiciones y las funciones proposicionales?

6- ¿Qué clases de proposiciones disyuntivas existen y en que consisten cada una de ellas?

7- ¿Qué es una proposición condicional?

8- La proposición negativa es atómica?

9- ¿Se puede reducir un condicional a una conjunción?

10- ¿Se puede reducir un bicondicional a una conjunción?

11- ¿De que forma se puede convertir una función proposicional en proposición?

12- ¿Qué son los cuantificadores?

13- Se puede expresar un expresión cuantificada usando los dos cuantificadores?

1.6 . PARA EJERCITARSE:

1- Analice e indique si son o no proposiciones:

a) El presidente de la Republica es el jefe de estado y personifica a la Nación
b) Los números irracionales no son inteligentes
c) Hace unos años se consideraba a la computadora como una “gran calculadora”, pero hoy habla de sus logros intelectuales.
d) El gobierno y la municipalidad obsequiaron una beca a una niña de escasos recursos.
e) General Motors despedirá a 3500 personas.
g) 7 es el número más importante.

2- Indica si las proposiciones son simples o moleculares. En el caso de ser moleculares, identifica a las proposiciones componentes y sus conectivos.

i) Ledesma se quedara con el ingenio la Florida

ii) El auto es blanco o es grande, pero no es cómodo.

iii) Si Marcelo es joven entonces es rebelde

iv) Margarita es soltera o casada

v) De salir el sol iremos al parque y escucharemos música.

vi) "Si se mantienen los niveles de recaudación, Santiago del Estero no tendrá problemas en cumplir con el presupuesto para este año"

3- Dadas las siguientes proposiciones p , q , r formar con ella mediante los Conectivos lógicos vistos, las proposiciones compuestas que se indican:

p: El dólar libre se mantiene invariable.

q: El gobierno aumenta los sueldos.

r: La canasta familiar se mantiene estable.

a) $(p \wedge q) \vee \sim r$

b) $\sim p \Rightarrow \sim q$

c) $r \Leftrightarrow \sim q \wedge r$

d) $\sim r \vee \sim p \Rightarrow \sim q$

4- Sean las proposiciones:

p : Está haciendo calor. q : Iré a la ciudad. r : Tengo tiempo.

(a) Escribir, usando conectivos lógicos, una proposición que simbolice cada una de las afirmaciones siguientes:

(a.1) Si no está haciendo calor y tengo tiempo, entonces iré a la ciudad.

(a.2) Iré a la ciudad sólo si tengo tiempo.

(a.3) No esta haciendo calor.

(a.4) Está nevando, y no iré a la ciudad.

(b) Enunciar las afirmaciones que se corresponden con cada una de las proposiciones siguientes:

(b.1) $q \Rightarrow (r \wedge \neg p)$

(b.2) $r \wedge q$

(b.3) $(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$

(b.4) $\neg(r \vee q)$

5- Colocar paréntesis (si fuera necesario) para que la fórmula lógica corresponda a la proposición que se indica en cada caso:

a) -Condicional: $p \vee q \Rightarrow r \wedge p$

b) -Conjunción: $p \wedge q \Rightarrow r \vee s$

c) -Negación: $\sim p \Rightarrow q \wedge r$

d) -Disyunción: $p \Rightarrow q \vee r$

e)-Negación: $\sim p \wedge (q \Rightarrow r)$

f) -Disyunción: $p \wedge q \vee r$

6- Si ' p' es falsa ¿qué resulta para?

a. $p \wedge p$ b. p v p

c. $p \Rightarrow$ (p v -p) d. (p v p) $\vee$ (-p $\wedge$. -p)

e. (p $\wedge$ -q) $\wedge$ (-p $\wedge$. q)

7 – Supóngase que sabemos que $P \Rightarrow Q$ es falso. Proporcione los valores de verdad para:

a) P ^ Q; b) P v Q; c) $Q \Rightarrow P$; d) $P \Rightarrow Q$; e) $\sim P \Rightarrow \sim Q$;
f) $\sim Q \Rightarrow \sim P$; g) Q ^ ~P; h) P ^ ~Q; i) P $\underline{\vee}$ Q; j) ~ (P $\Leftrightarrow$ Q).

8- Expresar en forma simbólica los siguientes condicionales y a partir de ello obtener en forma lógica y coloquial el condicional equivalente correspondiente.

a) Si las retenciones aumentan, el productor tomará una medida de huelga.

b) Cuando el índice de precio llegue a 1% podremos sacar crédito y compraremos un auto.

c) Nuestra moneda se devalúa solamente si su valor disminuye y está atada al dólar

d) No podrá recuperarse la economía ni el riesgo país disminuirá, si los piqueteros cortan el transito y aumenta la crisis financiera en EEUU.

9- Indique cuál es la condición necesaria y cuál es la condición suficiente en las siguientes proposiciones

La rentabilidad aumenta, si se rebajan los costos de producción

b) Se llama isósceles siempre que el triangulo tenga dos lados de igual medida

c) Si Jorge es un cliente del banco y solicita crédito, se le otorgará con solo saber su historial crediticio.

d) No será obligatorio la evaluación de la capacidad de pago del prestatario para el otorgamiento de un crédito

10.- Simbolizar los siguientes enunciados e indicar a que tipo corresponden:

a) No todos los economistas saben matemática.

b) Algunas obras de construcción no han sido aprobadas.

d) Todo número entero no es múltiplo de 3.

c) Cada número par es divisible por 2.

d) Cualquier número natural par es múltiplo de 2 pero algunos son múltiplos de 3.

e) No existen los números no primos.

1.3 NOCIONES DE CONJUNTOS

La nocion de Conjunto es importante por su relacion con las funciones proposicionales que establecen condiciones que deben cumplir los elementos de ese conjunto.

Los conjuntos (son **términos primitivos**) se expresan cada uno simbolicamente con letras mayúsculas A, B, etc. y utilizando { } , para encerrar los elementos o la funcion proposicional relativa a esos elementos.

Ejemplos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$

B = {x / x es un color de la bandera nacional de Argentina}

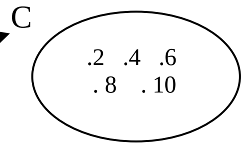
$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Pertenencia: término primitivo que se simboliza con $\in$ y se lo utiliza para expresar si un elemento pertenece o no a un conjunto definido previamente.

Por ejemplo: $a \in A$, $2 \in C$ y celeste $\in B$, pero $12 \notin C$

Diagramas de Venn:

Sirven para representar los conjuntos. Por ejemplo C:



Formas de definir un conjunto:

Cuando un conjunto es descrito por una propiedad que comparten sus elementos se dice que está determinado por **comprensión**.

Cuando damos una lista explícita de los elementos del conjunto, decimos que está determinado o definido por **extensión**.

Ejemplos: $A = \{x \mid x$ es un número primo menor que 50$\}$ (………………………)

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ (…………….)

Obviamente la conveniencia de definir por comprensión va de acuerdo a si es conjunto **finito** o Conjunto **infinito**. Observa el siguiente ejemplo:

$B = \{x \mid x$ es un entero mayor que $-3\}$

o de otra forma: $B = \{x \in Z \mid x > -3\}$ es un conjunto infinito

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (no se pueden enumerar todos sus elementos)

Conjunto finito: cuando tiene una cantidad **n** (natural) de elementos.

Ejemplos: V = {j, a, p, o, n } , M = { 0,1,2,3,........,10000}

Conjunto infinito: Es cuando **no** es finito. Ejemplo $N_0 = \{0,1,2,3,4,5,6....\}$

Consideremos el conjunto: $D = \{x \mid x$ es par, primo y mayor que 5$\}$

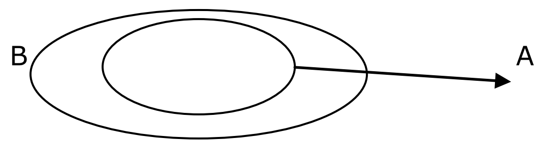
Por extensión: ……………………………………………………………..

El conjunto que no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y se nota con ∅ o **{ }.**

Inclusión- subconjuntos:

Consideremos dos conjuntos *A* y *B* cualesquiera.

Decimos que *A* es subconjunto de *B* si **todo** elemento de *A* es también elemento de *B*. Lo notamos con: $A \subseteq B$ y se lee: " *A está incluido* en *B*" .



$A \subset B$

(También se dice: A es un subconjunto de B; A es parte de B)

Definimos simbólicamente: $\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)}$

Ejemplos:

1) $A = \{x \mid x$ es un número natural menor que $7\}$

$B = \{x \mid x$ es un número entero menor que $7\}$

En este caso: ………….. (completa la línea)

2) $M = \{x \mid x$ es un número natural menor que $12\}$

$P = \{x \mid x$ es un número primo menor que $13\}$

En este caso: ………….. (completa la línea)

Propiedades

1) $\mathbf{A \subset A}$ (A es subconjunto de sí mismo).

2) $\varnothing \subset \mathbf{A}$ (El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto)

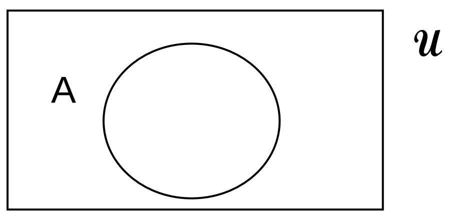
Conjunto Universal:

El conjunto referente donde se puede hablar de la propiedad del conjunto lo tomamos como conjunto **universal**.

$U = \mathbb{R}$

$A = \{ x / x$ es número irracional$\}$

$\mathbf{A} \subset U$



Cardinal de un conjunto: Es la **cantidad** de elementos que tiene un conjunto finito,

Si es A el conjunto, lo simbolizamos con: # A .

Ejemplo: $B = \{x / x$ es un color de la bandera nacional$\}$. luego: $\#B = 2$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

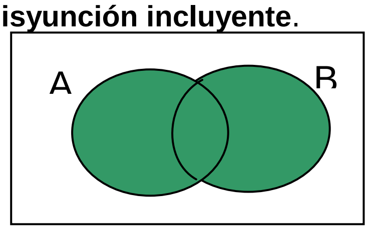
A partir de dos o mas conjuntos se pueden definir otros conjuntos cuyos elementos van a cumplir nuevas condiciones, mediante operaciones de **intersección, unión o diferencia** entre ellos.
El ejemplo siguiente permite clasificar diferentes grupos de seres vivos:

En general, para dos subconjuntos A y B cualquiera de un Universal U. Definimos:

Unión: ($A \cup B$)

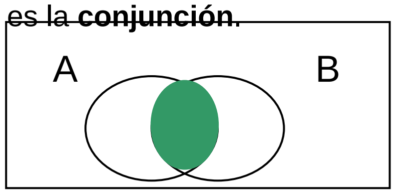
La unión es el conjunto cuyos elementos son del primer conjunto o del segundo conjunto o de ambos. El conectivo lógico para la unión es la **disyunción incluyente**.

Ejemplo: $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{4,5\}$,
luego : $A \cup B = \{ 0,1,2,3,4,5 \}$



Intersección: ($A \cap B$)

Entre dos conjuntos es otro conjunto formado por elementos que están en el primer y el segundo conjunto. El conectivo lógico para la intersección es la **conjunción**.



Ejemplo: $A = \{1,2,3,4,5,\}$ y $B = \{1,3,6,7\}$
luego : $A \cap B = \{1,3\}$

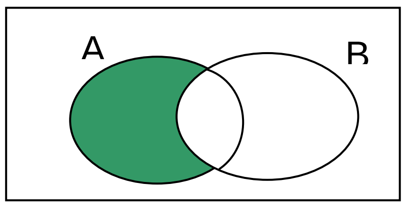
Conjunto disjuntos

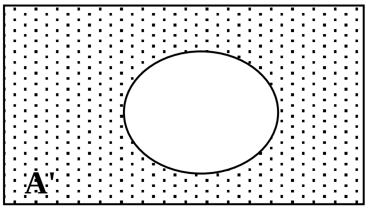
Los conjuntos que **no tienen elementos en común** se **denominan disjuntos**
Ejemplo: el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Diferencia de conjuntos: ($A - B$)

La diferencia de A menos B es otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto de A y **no** pertenecen al conjunto B.

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{1,2,3\}$,
luego $A - B = \{4, 5, 6\}$





<u>Complemento</u>: (A^c o C_A)

De un conjunto A, es el conjunto formado por los elementos del *U* que no están en A.

$$A^c = C_A = \{x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ej: U = Z y A = {x/x es par}

Entonces su complemento es A^c = {x/ x es impar }

PROBLEMAS DE CONTEO

Problema 1:Análisis de consumo

En un estudio de 100 consumidores realizado en un centro comercial un dia viernes , 75 consumidores indicaron que compraban la marca M de cierta crema de leche, 60 compraban la marca P y 40 adquieren ambas marcas.

Determine la cantidad de consumidores participantes en el estudio, quienes compraban:

a) Solo la marca M.

b) Unicamente la marca P

c) Al menos una de las marcas.

d) Exactamente una de estas marcas.

e) Otra marca que no sea P ni M

Para dar solución a este tipo de problemas reales, aplicaremos lenguaje gráfico, simbólico y operaciones vistos en la teoria de conjuntos.
Respuesta:

Primero identificamos **los conjuntos** dados y sus cardinales: En este caso son tres:

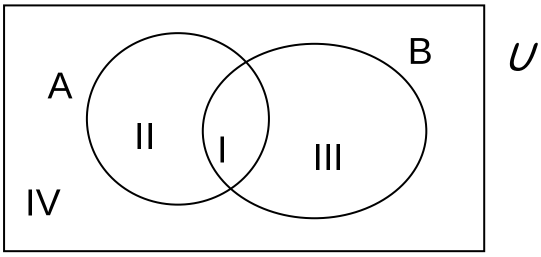
U = { personas de un centro comercial consumidores de crema de leche}

A = { $x \in U$ / x es consumidor de la marca M }

B = { $x \in U$ / x es consumidor de la marca P }

Sus cardinales respectivos son: # U = 100 # A = 75 # B = 60

Segundo: representamos la situación utilizando diagramas de **Venn:**



Como cada conjunto es un recinto cerrado, en este gráfico se pueden advertir más de 3 conjuntos.

Algunos de ellos están señalados con I, II, II, IV

*Donde **I** es la región formada por consumidores **en comun** a ambos conjuntos:*

definimos: **$A \cap B$ = {** $x \in U$ / x es consumidor de la marca M y de la marca P}

Y su cardinal: $\#(A \cap B) = 40$

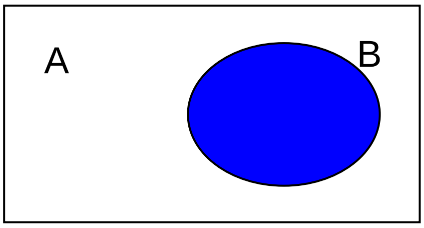
A partir de los datos y de lo que representan en cada region. del gráfico, respondemos:

a) $\#[A - (A \cap B)] = \#A - \#(A \cap B) = 75 - 40 =$ <u>35 consumidores</u>.

b) $\#B - \#(A \cap B) = 60 - 40 =$ <u>20 consumidores</u>.

c) *Al **menos una** de las marcas, s*ignifica que consume **una marca o la otra o ambas**. Esto siempre define la **Union** de A y B,

Aplicamos: $\boxed{\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)}$



Reemplazando:

$\#(A \cup B) = 75 + 60 - 40 =$ <u>95 consumidores</u>.

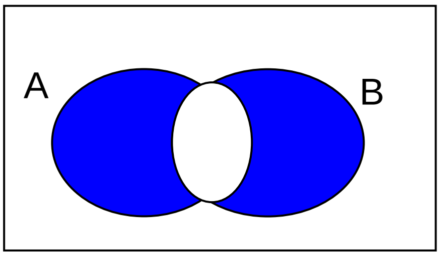
O también se pueden sumar los cardinales de las regiones II, I y III, si se conocen estos

$\#(A \cup B) = 35 + 40 + 20 = 95$

d) *Cantidad de consumidores de **exactamente una** de estas marcas*:

Plantea una **disyunción** excluyente entre las formas.

La operación asociada es: $(A \cup B) - (A \cap B)$



Donde: $\boxed{\#[(A \cup B) - (A \cap B)] = \#(A \cup B) - \#(A \cap B)}$

O sea: $95 - 40 =$ <u>55 consumidores</u>

Otra forma es sumando los cardinales de las regiones **II** y **III.** $= 35 + 20 = 55$

e) *Cantidad de consumidores de **ninguna** de estas marcas*:

$\#[U - (A \cup B)] = \#B - \#(A \cup B) = 100 - 95 =$ <u>5 consumidores</u>

<u>**Nota**</u>: Para tres conjuntos razonaremos de la misma forma:

$\boxed{\#[(A \cup B \cup C)] = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#[(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)}$

D EJERCICIOS PROPUESTOS:

1- Indica que conjunto está definido por extensión y cuál por comprensión:

$A = \{ y \in \mathcal{N} / y < 6 \}$
$B = \{ 2,4,6,8,10,12,\ldots.. \}$
$C = \{ x \in Z \ / \ x^2 - 5x + 6 = 0 \}$
$D = \{ x \in Z / \ x \geq -2 \wedge x < 2 \}$
$E = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$M = \{ x \in R \ / \ x^2 + 1 = 0 \}$

a) A los definidos por comprensión, definelos por extensión, si es posible.
b) A los definidos por extensión, definelos por comprensión.
c) ¿Hay conjuntos infinitos? Escribe el cardinal de aquellos que no lo sean.
d) ¿Hay un conjunto que incluya a otro? Exprésalo simbólicamente y graficamente
e) Propone un subconjunto de E que también sea subconjunto de A

2- Para cada universal proponer un ejemplo de conjunto incluido:

a) *U* ={ funciones reales polinómicas }
b) *U* = { Alumnos de CPN de la Universidad Nacional }
c) *U* = { Estudiantes menores de 20 años }

3- Sean los conjuntos: P ={x / "x es alumno de CPN." } y
Q = {x / "x es un alumno que de la Lic. en Administración" }
, y la expresión: *Todos los alumnos de Lic. en Adm., quieren estudiar CPN*
Representa la situación entre estos conjuntos mediante diagrama.

4- Dado el conjunto $U =\{ x \in \mathcal{N} / x < 8\}$
Analizar si los siguientes expresiones son V o F. Justificar:
a) $\forall x \in U$: x es número primo
b) $\exists x \in U$ / x es impar
c) $\exists x \in U$ / x es número primo e impar
d) $\forall x \in U$: x es número racional

5- Sean A ={1,2,3,4}; B ={2,4,6,8}; C ={3,4,5,6}
Hallar por extensión: a) A U B; b) $A \cap C$; c) B – C ;
d) (B U A)– C

6- Si $A = \{ x \in Z / -3 < x \leq 3 \}$, $B = \{ -2,0,2 \}$ y $C = \{ x \in Z / -4 \leq x < 3 \}$,
¿Cuál es $(A \cap B) - C$?

7- Dado *U* el conjunto de todos los estudiantes de la facultad de humanidades y Cs de la Salud. Además, sean:

A= { x / x asistió al curso de contabilidad }

B = { x / x asistió al curso de administración }

C = { x / x asistió a un curso de Impuestos }

Realiza las operaciones entre estos conjuntos y determina :

7.1. El conjunto de estudiantes que ha asistido al curso de contabilidad e Impuestos

7.2 El conjunto de estudiantes que ha asistido al curso de contabilidad y administración, pero no de Impuestos.

7.3 El conjunto de estudiantes que no ha asistido a los cursos de contabilidad, economía o administración.

8- Un estudio de las opiniones de 12 economistas líderes en cierto país mostró que, debido a que se espera una baja en los precios del petróleo:

9 redujeron su estimaciónde la tasa de inflación.

8 aumentaron su estimación de la tasa de crecimiento del PBI.

3 redujeron su estimación de la tasa de inflación pero no aumentaron su estimación de la tasa de crecimiento del PBI en ese pais durante los próximos 12 meses.

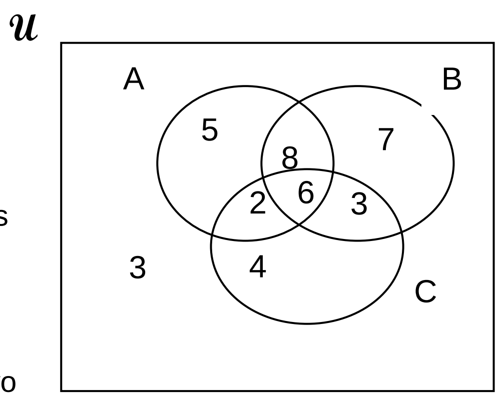
¿Cuántos economistas redujeron su estimación de la tasa de inflación a la vez que aumentaron su estimación de la tasa crecimiento del PBI para ese período?

9- Sean U el conjunto de todos los turistas encuestados durante un período de una semana en Bs As y los siguientes conjuntos :

A = { x ∈ U / x utilizo el tren subteraneo }

B = { x ∈ U / x utilizo un taxi}

C= { x ∈ U / x utilizo un colectivo }



El diagrama ilustra la situacion de 38 turistas dispuestos en diferentes conjuntos.

Exprese simbolicamnte por comprensión:

9.1 El conjunto de turistas que tomaron taxi y colectivo

9.2 El cardinal de los turistas que tomaron unicamente taxi.

9.3 El conjunto de turistas que tomaron subte y no cole

9.4 El cardinal de los turistas que tomaron al menos los tres transportes

9.5 El conjunto de turistas que tomaron subte o colectivo pero no taxi

9.6. El conjunto de turistas que no tomaron medios de transporte

10- En un curso de 130 alumnos **todos** los alumnos que estudian derecho, quieren estudiar Cs Politicas. Si en total son 174 los alumnos que estudian Cs Politicas. ¿Cuántos alumnos les gusta estudiar unicamente Cs Politicas?

Realiza un diagrama que represente la situacion.

11- En una encuesta sobre preferencias de los canales de T.V., 11 y 13 se obtuvo la siguiente información : 55 Encuestados ven el canal 11, 15 ven el canal 11 y el canal 13, 23 Sólo ven el canal 13 y 3 ven otros canales. Determine:

a) La cantidad de personas que ven sólo el Canal 11.
b) La cantidad de personas encuestadas
c) La cantidad de personas que ven el Canal 11 o el 13 o ambos
d) La cantidad de personas que no ven el Canal 11.

12- En un curso compuesto por 23 alumnos; 12 estudian inglés; 11 estudian francés Unicamente y 5 estudian Inglés y Francés. Responde justificando:

a) ¿Cuántos alumnos estudian sólo inglés?
b) ¿Cuántos alumnos estudian francés?
c) ¿Cuántos alumnos estudian otros idiomas?

1.4. RELACIONES Y FUNCIONES:

Problema 1 :

Se desea viajar de Santiago del Estero a San Martin de los Andes. Como no existe un transporte directo, solo dos empresas conectan Sgo – Mendoza y desde alli hay otras tres empresas al destino final.

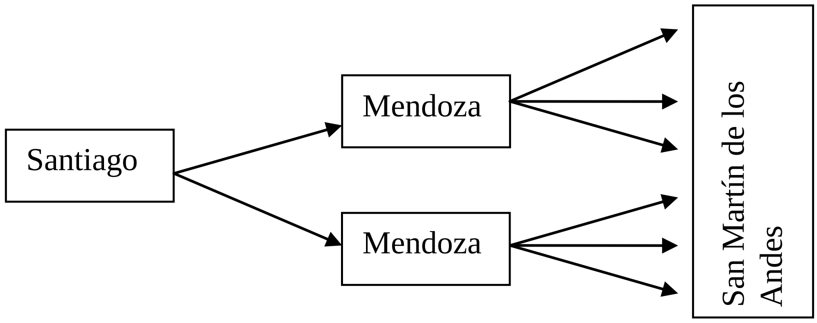
¿De cuántas formas se podrá viajar de Santiago a San Martin de los Andes con estas empresas?

Respuesta:

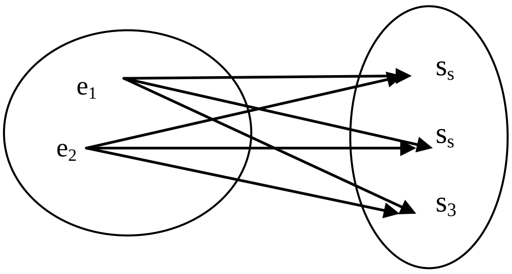
Designemos con: $A=\{ e_1 , e_2 \}$ al conjunto de las empresas Sgo – Mendoza y

con $B =\{ s_1 , s_2 , s_3\}$ al conjunto de las empresas Mendoza – S. M. de los A.

Utilizando los llamados **diagrama de árbol**, podemos visualizar la situacion:



Graficamente definimos este producto cartesiano mediante diagramas:



¿Las **formas** de viajar de San martín de los Andes a Santiago serán las mismas?

En general: Dados dos conjuntos A y B no vacios :

El producto cartesiano de A por B se define como: el conjunto de todos los pares **ordenados,** tal que la primera componente esta en A y la segunda está en B

$$A \times B = \{ (x,y) \ / \ x \in A \ \wedge \ y \in B \}$$

Se lee: "*par ordenado de primera componente **x** y segunda componente **y**"*

El producto cartesiano **no es** conmutativo dado que: $A\times B \neq B\times A$

Problema 2: Relaciones

Sean los siguientes conjuntos:

A = { x/ x es la cara de un dado} y B = { x / x es una carta de bastos del 1 al 12 }

a) Si se desea primero arrojar el dado y luego sacar una carta ¿Cuántos resultados posibles se pueden presentar?

b) ¿ Y si gana el que tira un dado y luego saca una carta, tal que la suma de 10?

c) ¿Y si se gana el que obtenga por suma 6? Define cada una.

Definamos relación entre dos conjuntos cualesquiera A y B no vacios.

Relación entre **A y B** es **todo subconjunto** del **producto cartesiano AxB**

En símbolos: R *es una relación de* A *en* $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$

Ejemplo: Supongamos sean:

A = { 1,2,3 } , B = { 1,2 } y una relación R definida de la forma:

$R = \{ (x ,y) / x + y \leq 3 \}$, o de otra manera equivalente: $x \, R \, y \Leftrightarrow x + y \leq 3$

(pares ordenados tal que la suma de la 1ª y 2ª componente x, y , sea menor o igual a 3)

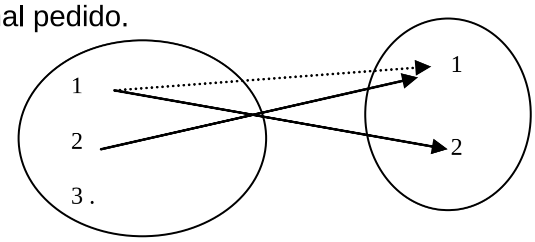
¿Qué pares componen la relación?

Si A x B = { (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)} , seleccionaremos unicamente los pares que hagan verdadera el esquema proposicional pedido.

Ellos son: ………………………………………..

Luego R por extensión: ……………………………..

y su gráfico se representa como se indica:



Estas relaciones se pueden representar también mediante ejes cartesianos.

Asociado a toda Relación se presentan los conceptos de **Dominio y Codominio**.

Dominio: es el conjunto de las primeras componentes de los pares que están en la relación. El dominio de la relación es el subconjunto del conjunto de partida. $D_R \subset A$.

$D_R = \{ x / x \, R \, y \}$

Codominio ,Imagen o Recorrido: es el conjunto de las segundas componentes de los pares de la relación. Es un subconjunto del conjunto de llegada. $C_R \subset B$

$C_R = \{ y / x \, R \, y \}$

Relación inversa: Dada una relación *R de A en B,* se llama relación inversa R^{-1} al conjunto formado por todos los pares $(y,x) \in B \times A$ tal que $(x,y) \in R$

Ejemplo: Dada la relación: $R = \{ (1,1),(1,2),(2,1)\}$

a) Determinamos su dominio y codominio respectivamente:

$D_R = \{ 1, 2 \}$ y $C_R = \{ 1, 2 \}$

b) Su relación inversa: $R^{-1} = \{ (1,1),(2,1),(1,2)\}$

1. FUNCIÓN

Sean dos conjuntos **A** y **B** no vacíos.

Una función *f* entre un conjunto A (al que le llamaremos dominio) y otro B es una relación entre A y B en la que a cada elemento de A le corresponde un **único** elemento en B.

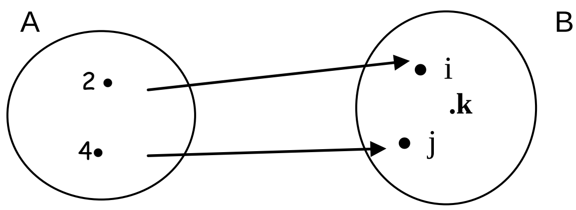
Simbólicamente: $\boldsymbol{f : A \to B}$

Denotaremos a las funciones con letras: *f, g, h, t, u…*

Ejemplo:

A = {2, 4 } , B = {i, j, k} . Una función *f,* puede ser: $f = \{(2, i) , (4, j)\}$

Y su gráfico:



Las **imágenes** son las segundas componentes de los pares de la función y las notaremos: $f(2) = i$ y $f(4) = j$

En general: Cualquiera sea el conjunto **A**, y ***x*** uno cualquiera de sus elementos, una función *f* de **A** en **B** , se simbolizara:

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

Se lee:
¨ *f* es una función de A en B que a cada x perteneciente a A le asigna como imagen *f*(*x*) en B¨

Donde: **A** = D_f , y $f(x)$ es la imagen de x

Definición 2:

Sean A y B conjuntos no vacíos y "***f***" una relación de A en B ($f \subset A \times B$) .
f es una función de A en B sí y solo sí se cumplen las condiciones de:

i) **Existencia** : cada elemento de A le corresponda **al menos** una imagen en B. En símbolos: $\forall a \in A\ ,\ \exists\, b \in B\ /\ (a, b) \in f$

ii) **Unicidad** : la imagen de cada elemento de A debe ser única
En símbolos: $(a, b) \in f \ \wedge\ (a, c) \in f \ \Rightarrow\ b = c$

La condición i) exige que : $D_f = A$, aunque no es necesario que $R_f = B$

ii) exige que: si hay dos pares que tienen la misma primera componente, las segundas también deberán ser iguales.

El ejemplo siguiente: $R = \{(t, p),(s, k),(t, m)\}$ **no es función**. ¿Por qué?

E EJERCICIOS PROPUESTOS

13- Dados los conjuntos siguientes :

A = { a,b,c} (conjunto de tres camisas diferentes: azul, blanca y celeste)

B = { m,n,g} (conjunto de tres pantalones diferentes: marron, negro y gris)

Deseamos conocer de cuántas formas diferentes se pueden **combinar** los pantalones y las camisas en ese orden.

14- Dados los conjuntos: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y las relaciones de A en B:

$\Re_1$: “ $x \Re y \Leftrightarrow x - y = 0$ “

$\Re_2$: “ $x \Re y \Leftrightarrow x$ *es divisor de* y”

$\Re_3$: “ $x \Re y \Leftrightarrow x > y$

a) Definir por extensión cada una de las relaciones

b) Determinar el Dominio y el Codominio de cada una de las relaciones dadas.

c) Representar en ejes cartesianos la primera y la última relación.

15- Dados los conjuntos: $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

Y la relación de I_4 en I_5 , $R = \{ (x,y) / x+1 < y\}$

a) Definir por extensión *R*

b) Determinar el Dominio y el Codominio de *R*.

c) Representar en ejes cartesianos la relación dada.

16- Dados los conjuntos: $A = \{ x \in Z / x \geq -2 \wedge x < 2 \}$ y $D = \{ x \in N / x \text{ par} \wedge x < 8 \}$
y la relacion R de A en D: $R = \{ (x,y) / x+3 = y\}$
Obtener su relación inversa

17- Sean: $A = \{a, b,c,d\}$ y $B \neq \emptyset$

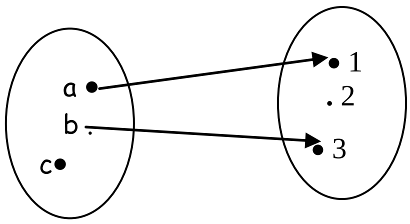
Sea la relación $R = \{ (a,1) , (b,2) , (c, 1), (b,3) \}$ definida de un conjunto A en B

a) Determinar el Dominio y el Codominio de *R*.

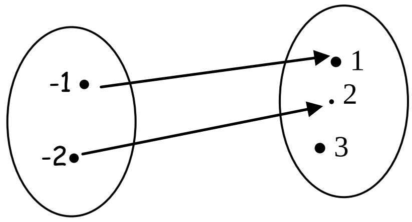
b) Proponer por lo menos un conjunto B cuyos elementos estén relacionados por R.

18- Indica cuales de las siguientes relaciones no es función. Justifica:

a)



b)



19- Sean los conjuntos: A = { a , b , c , d } y B = { 1 , 2 , 3 , 4 }, y las relaciones:

R_1 = {(a,1) , (b,1) , (c ,1) , (d ,1)} R_2 = {(a , 1) , (b , 2) , (d , 4) , (b , 3)}

R_3 = {(a,4) , (b ,3) , (c ,1) , (d ,2)} R_4 = {(a ,1) , (b , 4) , (c , 4) , (d ,4) ,(a ,2)}

i) ¿Cuales son aplicaciones o funciones? Justifica.

ii) Indicar dominio y recorrido de las funciones.

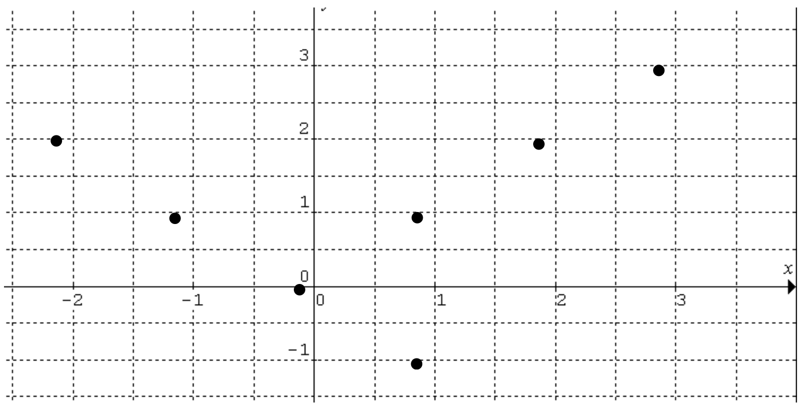
20- Sean los conjuntos: A={ -1, 0, 1 , 2 } , B = { 0, 1, 2, 3, 4 } y la función:

$g = \{(x,y) / y = x^2\}$

i- Define por extensión la función f (escribe el conjunto de pares ordenados)

ii- Representa en ejes cartesianos.

21- Sean *A = Z* y *B = Z*. Analiza si el siguiente gráfico que representa una parte de un gráfico mas amplio, es o no una aplicación de A en B.



22 - Sea la función $\boldsymbol{f}: A \to B$ tal que: $\boldsymbol{f} = \{(a, 3),(b, 4),(c,3)\}$.

Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) *A={a,b,c} y B={2,3,4}*

b) C_f = {2, 3,4}

c) *f(a) = f(c)*

d) *f(a) – f(c) =0*

1.5. LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

Sea A un conjunto cualquiera no vacío y ***** una operación.

Una **ley de composición interna** en **A** es una función que asigna a **cada par** ordenado de elementos de **AxA** un **único** elemento de A**,** y lo expresamos simbólicamente:

$$\mathbf{*:\ A \times A \to A}$$

$$\mathbf{(u,v) \mapsto *\,(u,v)}$$

Otra forma: * es un l.c.i en A $\Leftrightarrow$ $* : A^2 \dashrightarrow A$

De manera que : $u \in A \wedge v \in A \Rightarrow u * v \in A$

Por ejemplo:

Consideremos: A = { 1, -1 } , B={1, 2, 3, } y las relaciones:

R_1 = { ((x,y) , x.y) de AxA en A y R_2 = {((x,y) , x+y)} de BxB en B

R_1 es función cumple con ambas condiciones: D_{R1} =A (existencia) y de unicidad. Luego es una Ley de composición interna (l.c.i.) en A

En cambio R_2 no es una l.c.i., pues: al par (2,3) no tiene correspondiente (2+3=5)

La relación R_1 se puede definir en una tabla de doble entrada:

·	**1**	**-1**
1	1	-1
-1	-1	1

POSIBLES PROPIEDADES y ELEMENTOS DISTINGUIDOS DE UNA LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

Sea *: AxA →A una ley de composición interna, se pueden cumplir las siguientes propiedades:

1. **Asociatividad:** * es asociativa si y sólo sí $\forall a, b, c \in A : (a * b) * c = a * (b * c)$
2. **Conmutatividad:** * es conmutativa sí y sólo sí $\forall\, a, b \in A$: $(a * b) = (b * a)$
3. **Existencia de elemento Neutro:** $\exists\, e \in A \,/\, \forall\, a \in A$:

   $a * e = e * a = a$ (**Es único** para **todos**)
4. **Existencia de elemento Inverso:** sea * una l.c.i. con elemento neutro e;

   $\forall\, a \in A, \exists\, a^{-1} \in A \,/\, a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$
5. **Distributiva** de una l.c.i con respecto a otra:

Nota: a^{-1} recibe el nombre de inverso de a . Este **es único por cada** elemento.

Ejemplos:

1.- En la siguiente tabla de doble entrada se define una ley de composición interna en el conjunto A ={p ,q}

♣	**P**	**q**
P	P	q
q	Q	p

Analizaremos algunas propiedades de la operación definida

<u>Asociativa:</u>

- (p ♣ p) ♣ p = p ♣ p = p
  p ♣ (p ♣ p) = p ♣ p = p → (p ♣ p)♣ p =p ♣ (p ♣ p)
- (p ♣ p) ♣ q = p ♣ q = q
  p ♣ (p ♣ q) = p ♣ q = q → (p ♣ p) ♣ q = p ♣ (p♣q)
- (p ♣ q) ♣ p = q ♣ p = q
  p ♣ (q ♣ p) = p ♣ q = q → (p ♣ q) ♣ p = p ♣ (q ♣ p)

(Seguir probando para todos. En total son 8 casos).

<u>Conmutativa:</u>

p ♣ q = q
q ♣ p = q → p ♣ q = q ♣ p

<u>Elemento Neutro</u>: es **p ,** pues p ♣ **p** = p y q ♣ **p** = q

<u>Inversos</u>: el inverso de p es p , pues p ♣ p = p (neutro)
y el inverso de q es q , dado que q ♣ q = p

Si una **L.C.I *** definida en un conjunto **A es asociativa,** tiene **elemento neutro** y **admite inverso,** se dice que el par **(A, *) es** un **GRUPO.** Si además cumple la conmutatividad, es un **Grupo conmutativo o abeliano.**

Por ej.: (Z , +) , (Q – {0}, .)

2.- Dada la operación * definida de la siguiente forma:

$* : Q \times Q \rightarrow Q$

$(a, b) \rightarrow a * b = \frac{a-b}{2}$

(* es l. c. i. , pues las dos operaciones – y : están definidas en Q)

Analizaremos algunas propiedades considerando tres números racionales x, y, z cualesquiera

- Conmutativa: $x * y = \frac{x-y}{2}$

  $Y * x = \frac{y-x}{2}$ Luego $x * y \neq y * x$

- Elemento Neutro: Planteamos $x * e = x$

- $\frac{x-e}{2} = x \Rightarrow e = -2x + x \Rightarrow e = -x$

Esto nos indica que el neutro depende de cada valor de x .**Absurdo** puesto que el neutro **es único.**

Ejercicios:

23- Decide si son leyes de composición interna (l.c.i.) las operaciones $\otimes$ y $\oplus$ definidas en $A = \{1,2,3\}$, según las tablas:

$\otimes$	1	2	3
1	2	1	3
2	1	2	3
3	3	3	1

$\oplus$	1	2	3
1	3	2	1
2	1	3	2
3	1	2	3

Además analizar:

a) la conmutatividad
b) la existencia de elemento identico o neutro
c) la existencia de inversos.

24- Sea A = {2, 3, 4} y $\oplus$ una ley definida en A x A tal que : $4 \oplus 2 = 3$

Confeccionar una tabla para que la aplicación sea l. c. i. , con inverso.

25- Sea B = {1, 3, 5} y $\oplus$ una ley definida en B x B tal que : $1 \oplus 3 = 1$

Confeccionar una tabla para que la ley sea l. c. i. con elemento neutro 5 y no sea conmutativa.