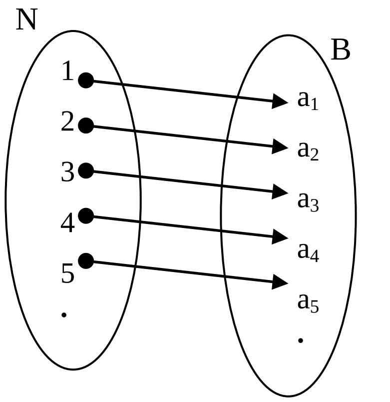
GUIA TEORICO-PRACTICA II

CONTENIDOS

2.1 SUCESION

Es toda función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.



S : N → B

Cualquiera sea una sucesión S ,
la denotamos:

$$\mathbf{S = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}}$$

O bién $\mathbf{S = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

En particular, una sucesión numérica de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$

Cada uno de los números reales se llama **término** de la sucesión.

Ejemplo:

El conjunto ordenado de números impares es una sucesión de números reales

Lo notamos con: $S_n = \{3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots\}$, Tambien: $S_n = \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}$

donde: $S_1 = 3$, $S_2 = 5$, $S_3 = 7$,… y **2n+1** recibe el nombre de **término general.**

Las sucesiones pueden ser:

Crecientes: si cada término es mayor o igual que el anterior.

Ejemplo: $a_n = \{1, 1, 2, 6, \ldots\}$

Decrecientes: si cada término es menor o igual que el anterior.

Ejemplo: $b_n = \{6, 5, 3, 2, 1, 1 \ldots\}$

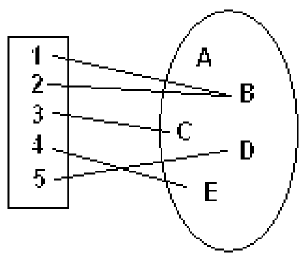
Alternadas: si un término y el siguiente tienen signos opuestos.
Ejemplo: $c_n = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, ...\right\}$

Constantes: si todos sus términos son iguales. Esto es: $\forall n \in N : a_n = a_{n+1}$
Ejemplo: a_n ={5, 5, 5, 5 ....}

Los ejemplos son de **sucesiones infinitas,** pero también pueden ser **finitas.**

Sucesión Finita (arreglo): toda función cuyo Dominio es un **subconjunto** finito de números naturales. El conjunto formado por los términos del conjunto Imagen recibe el nombre de **arreglo**. (se pueden repetir elementos)

Ejemplo: $S: I_5 \rightarrow R \ / \ I_5 \subset N$ siendo: $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



La sucesión finita resulta:

S ={ B, B, C, E, D }

Esto es un **Arreglo** de 5 elementos

Las progresiones constituyen ejemplos prácticos de sucesiones.

Pueden ser **Aritméticas** y **geométricas.**

* Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales que a cada término después del primero, se obtiene **sumando** una constante **d** al término anterior
(d es la diferencia en común).
Una progresión aritmética queda determinada por completo cuando se conocen el 1º y la diferencia d.

Ejemplo 1: a_n ={3, 7, 11, 15, ...} donde el primer término es 3 y la diferencia 4

Ejemplo 2:

Por el alquiler de una casa se acuerda pagar $ 3000 al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en $ 400 mensuales mas.
¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?

Rta: Completamos la tabla con la sucesión de términos:

1	2	3	4	5	…..	10
3000						

* Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en que a cada término después del primero se obtiene **multiplicando** por una constante **r** llamada razón geométrica.
Una progresión geométrica queda determinada por completo cuando se conocen el 1º término y la razón r.

Ejemplo1: $b_n = \{2, 6, 18, 54, ...\}$ El 1º término es 2 y la razón es 3

Ejemplo 2: $c_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$ El 1º término es 1 y la razón es ½

2.2 - EJERCICIOS PROPUESTOS:

1- Escribe los 6 primeros términos de las sucesiones y luego el término general:

a) A cada número natural n le corresponde su siguiente al cuadrado

$S_n = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots\ldots \} = \{ \qquad \}_{n \in \mathbf{N}}$

b*) A cada número natural n le corresponde su triple disminuido 1*

$S_n = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots\ldots \} = \{ \qquad \}_{n \in \mathbf{N}}$

2- Escribe los cinco primero términos de las sucesiones cuyos términos generales se Indican. En cada caso indica si es creciente, decreciente, alternada o constante.

a) $a_n = 3n - 6$ b) $a_n = \frac{1-n}{2n}$ c) $a_n = (-1)^n . 2^n$

3- Obtener deduciendo el término a_n de una progresión aritmética de diferencia d y primer termino a_1 (ayuda: completa las igualdades siguiendo la formación):

$a_1 = a_1$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

....

$a_n =$

4- Para cada progresion , encuentra el término general:

a) 2, 7, 12, 17, 22, ...
b) 50 , 63, 76 , 89 , …..
c) -5, -13, -21, -29, ….

5- Obtener deduciendo el término a_n de una progresión geomética de razón r y primer termino a_1 (ayuda: completa las igualdades siguiendo la formación):

$a_1 = a_1$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

....

$a_n =$

6- Para cada progresion , encuentra el término general:

a) 3, 12, 48, 144, ...
b) 10 , 1 , 1/10, 1/100,….

2.3 SUMATORIA- PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA:

Dada una sucesión finita $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots, a_n \}$, es frecuente sumar sus términos : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_i + \ldots\ldots + a_n$

Este desarrollo de suma se puede expresar en forma abreviada, notando: $\sum_{i=1}^{n} a_i$

que significa : " *Sumatoria desde i* = 1 *hasta n, de los* a_i "

El símbolo Σ (letra griega sigma) es un operador que tiene un índice "i" (también puede ser j o k) y un limite "n" , a los cuales se les asocia números: de valor inicial y de valor final respectivamente.

Ejemplos:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = \sum_{j=1}^{9} (2j - 1)$

b) $\sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} . i^2 = (-1)^2.1^2 + (-1)^3.2^2 + (-1)^4.3^2 + (-1)^5.4^2 + (-1)^6.5^2$

Propiedades de la sumatoria:

1) $\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k.\sum_{i=1}^{n} a_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

3) Sea k una constante: $\sum_{i=1}^{n} k = n.k$

Método de Inducción Completa:

Una sucesión elemental conocida es la de los n primeros números naturales, cuya suma es: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$

Sea a su vez la siguiente función proposicional P(n):

P(n): *"La suma de los n primeros números naturales es **igual a*** $\frac{n.(n+1)}{2}$ *"*

Es decir: $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$

o lo que es lo mismo: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

Podemos realizar pruebas con algunos números naturales a ambos miembros:

Para n = 1 , es fácil ver que: $1 = \frac{1.(1+1)}{2}$

Para n= 2 , 1+2 = 3 = $\frac{2.(2+1)}{2}$

Para n= 3 , 1+2+3 = 6 = $\frac{3.(3+1)}{2}$

Esta propiedad es cierta **para todo número n** natural ?

No se puede generalizar a partir de estas únicas pruebas. Para responder la pregunta, aplicaremos el principio de inducción matemática que nos proporciona un método de demostración para probar para cualquier número n natural.

Principio de Inducción Completa (P.I.C.):

Sea P(n) una función proposicional o propiedad que depende del número natural n∈N.

P(n) es verdadera, ∀ n ∈ N si se tiene que:

1- " la proposición P(1) es verdadera"

2- "Si la proposición P(h) es verdadera entonces la proposición P(h+1) es también verdadera.

Simbólicamente:

[P(1) es **V** ∧ **(P(h)** es **V** ⇒ **P(h+1)** es **V)]** ⇒ **P(n)** es **V ,** ∀ **n∈*N***

Aplicamos el método a nuestro ejemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$, de la siguiente forma:

1) Probaremos para n =1, si la propiedad es verdadera. O sea analizamos si P(1) es V.
(reemplazamos n =1 e i =1 en ambos miembros y comparamos)

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$ y $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, el resultado es el mismo. Es Verdadero

2) P(h) es V ⇒ P (h +1) es V

Para probar la verdad de este condicional, supondremos V el antecedente o Hipótesis y probaremos (o no) el valor de V del consecuente o tesis.

Para ello desarrollaremos la propiedad en tres partes:

1º , Supongamos que P(h) es verdadero ,es decir para n = h se cumple la hipótesis:

$\sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2}$ es V

2º Tenemos que probar que P (h +1) es verdadero. Es decir, para n = h +1,

hay que demostrar: $\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)[(h+1)+1]}{2} = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$

(probar esta igualdad)

3º Demostr.) Partimos del primer miembro de la última expresión y desarrollamos la sumatoria. Luego mediante sustituciones y recursos algebraicos procuramos llegar al segundo miembro.

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \underbrace{1+2+3+\text{..........}+h}+(h+1) = \sum_{i=1}^{h} i + (h+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

Luego se puede afirmar que P(n) : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$ es V para todo número natural

.

2.4 - EJERCISIOS PROPUESTOS:

7- Desarrolle las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{7} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$

b) $\sum_{j=1}^{5} (-1)^j \ (2j-1)$

c) $\sum_{k=2}^{5} 30$

d) $\sum_{i=1}^{5} (3i+2)$

e) $\sum_{k=2}^{6} 2^{-k}$

f) $\sum_{i=0}^{4} i \ x^i$

g) $\sum_{j=1}^{5} (j^2 - j)$

h) $\sum_{i=0}^{3} \frac{i+1}{i+2}$

8- Aplica las propiedades de la sumatoria:

a) $\sum_{i=1}^{5} 90 =$

b) $\sum_{i=1}^{6} (7+i) =$

c) $\sum_{i=1}^{6} 3.(2-i) =$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 =$

9- Exprese, bajo el operador sumatoria, las siguientes sumas:

a) 2 + 5+ 8 + 11 + ... (10 términos)

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=$

c) 1/3 + 2/3 + 1 + 4/3 + 5/3+ 2..........................n términos

d) -2 + 4 – 6 + 8 – 10 + 12

e) $a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

f) –1 – 4 – 7 – 10 – 13 ......

g) –1 + 4 – 9 + 16 - 25

h) 4 + 8/3 + 2 + 8/5 + 4/3 + 8/7

10- Probar aplicando el P.I.C. :

P(n): "La suma de los **n** primeros números naturales impares es **n^2**"

11- Demuestre, aplicando el principio de inducción, la validez de la siguientes expresiones:

a) $\sum_{i=1}^{n} (2i) = n.(n+1)$

b) $\sum_{J=1}^{n} J^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

c) $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$, para todo n $\geq$ 1

12- Aplicar principio de induccion para demostrar las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1) = \frac{n(3n+5)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3\,(3^n - 1)}{2}$

c) $\sum_{j=1}^{n} 2j - 4 = n.(n-3)$

d) $\sum_{i=1}^{n} (6i-5) = 3n^2 - 2n$

e) $\sum_{i=1}^{n} (3i - 1) = \frac{n\,(3n+1)}{2}$

f) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\,(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

13- Aplicando propiedades y el resultado de sumatorias conocidas, determinar:

a) $\sum_{i=1}^{10} (3\,i - 5) =$

b) $\sum_{j=1}^{20} \left(\frac{1}{3} j + 3 \right) = 130$

c) $\sum_{k=1}^{p} \frac{k\,(k+1)}{2} = \frac{p\,(p+1)\,(p+2)}{6}$

d) $\sum_{i=1}^{7} (2 \,.\, 3^i) =$

e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{4^i}{2} = \frac{2\,(4^n - 1)}{3}$

f) $\sum_{i=2}^{n} (3\,i^2 - 1) =$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a\,(a^n - 1)}{a - 1}$$

2.5 FUNCIÓN FACTORIAL:

Definición: Se denomina factorial de un número n y se simboliza con **n!** a la función definida:

$$! : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \quad / \quad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ n.(n-1)! & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

con $n \in \boldsymbol{N_0}$

Ejemplos:

0! = 1 ; 1! = 1 (por definición) 2 ! = 2 . (2-1)! = 2 . 1! = 2 .1 = 2

5! = 5 **.** 4! Pero debemos calcular 4!

Aplicando en forma recurrente la tercera parte de la definición resulta:

5! = 5 **.** 4! = 5 **.**4**.** 3! = 5 **.** 4 **.** 3 . 2! = 5**.** 4 **.** 3 **.** 2 . 1 = 120

Propiedad :

El factorial de un número n ≥ 2 es igual al producto de los n primeros números naturales. En símbolos:

n ! = n.**(n-1) ! =** n. (n-1). (n-2). (n-3). 3.2.1

(Con calculadora científica, usar la tecla $\boxed{!}$)

2.6 - EJERCICIOS PROPUESTOS:

14- Expresar como un único factorial :

a) 6. 5! =

b) 3! . 4 . 5 =

c) k.(k+1).(k-1)! =

d) (2n – 2)! 2n . (2n – 1). =

15- Simplificar y calcular cuando sea posible:

a) $\dfrac{11!}{9!}$

b) $\dfrac{8!}{(8-2)!} =$

c) $\dfrac{(8+1).\,2!}{3!.0!} =$

d) $\dfrac{12!}{(12-3)!.3!} =$

e) $\dfrac{10!}{(10-3)!}.3! =$

f) $\dfrac{n!}{(n-1)!} =$

16- Simplificar: a) $\dfrac{(n+2)!}{2.n!}$

b) $\dfrac{9!.(m+1)!}{2!.(9-2)!.m!} =$

17- Demostrar que:

a) $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n-1}{n!}$

b) $\dfrac{n}{k!} - \dfrac{n}{(1+k)!} = \dfrac{nk}{(k+1)!}$

c) $\dfrac{h!}{(h+1)!} + 2 - \dfrac{2h+3}{(h+1)} = 0$

2.7 COMBINATORIA SIMPLE:

Hay problemas cuya solución requiere de técnicas de conteo más elaboradas que las desarrolladas en la guía anterior. Estos problemas se conocen como

problemas de la combinatoria. Ejemplos:

I) *¿De cuántas formas pueden quedar clasificados cuatro equipos de fútbol que participan en un torneo?*

II) Se sabe que un código admite cuatro números diferentes del 0 al 9
Si se desconoce el mismo, ¿Cuántas pruebas serán necesarias para chequear todos los casos?

III) *Se desea formar una comisión de tres personas y para el caso se presentan ocho.¿Cuántas comisiones se pueden formar?*

Son tres problemas que se resuelven con técnicas diferentes. Pero todos todas ellas se basan en dos principios o reglas fundamentales:

Regla del producto y **Regla de la suma**.

***Regla del producto*:**

Supóngase que una tarea T_1 se puede realizar de n_1 formas, una tarea T_2 se puede efectuar de n_2 maneras, …… y finalmente una tarea T_k se pueda llevar a cabo de n_k formas distintas e independientes, entonces el número de formas en que puede realizar las tareas T_1 , T_2 , …..y T_k en orden, está dado por el producto:

$$\mathbf{n_1 \,.\, n_2 \,\ldots.\, n_k}$$

Ejemplo:

"Una casa de comidas tiene en su menú del día: dos tipos de entradas, cuatro platos principales y tres postres. ¿Cuántos menús diferentes pueden armarse con las opciones?"

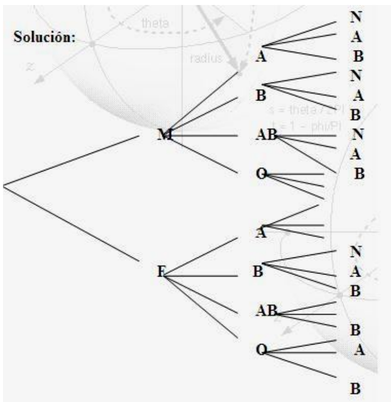
Rta: T_1 : elegir entrada n_1: 2 tipos

T_2: elegir plato principal n_2: 4 "

T_3: elegir postres n_3: 3 "

Luego existirán en total: 2 .4. 3 = 24 menús diferentes.

También se puede llegar al mismo resultado exhibiendo todas las rutas posibles mediante un ***diagrama de árbol***. Donde se puede apreciar todos las formas ordenadas:



Regla de la Suma :

Supóngase que una tarea T_1 se puede realizar de n_1 formas o una tarea T_2 se puede efectuar de n_2 maneras, …… o finalmente una tarea T_k se pueda llevar a cabo de n_k formas. .

Supongamos además que **no es posible** que todas las maneras se realicen simultáneamente, entonces el número total de maneras diferentes en que el proceso puede ocurrir es:

$$\mathbf{n_1 + n_2 + ... + n_k}$$

Ejemplo: *Una Srta tiene 5 polleras y 6 pantalones todos distintos*

¿De cuántas formas podrá vestir con pollera o con pantalón ?

Rta:

Como no son procesos simultáneos, sumamos: 5 + 6 = 11 formas de vestir

Los problemas de la combinatoria se reducen a las siguientes **tres** tipos:

I) Permutación II) Variación III) Combinación

O una combinación de algunas de ellas. En este apunte veremos las **simples**

- **Permutación Simple**.

Definición: Dado un conjunto finito de "n" elementos, llamamos **permutación** simple a todo arreglo o conjunto ordenado formado con los "n" objetos **sin repetir**.
Para un conjunto de n elementos se presentaran diferentes arreglos, con los mismos elementos pero en orden diferente.

La formula que permite calcular **todas** las permutaciones de un conjunto de n elementos es:

$$\mathbf{P_n = n!}$$

Ejemplo: ¿De cuántas formas se pueden ordenar en fila un grupo de cinco personas para sacarse una fotografía?

Respuesta:

Supongamos sea A el conjunto de personas: A = {a, b, c, d, e}

Una presentación es: a b c d e otra será a b c e d , otra a b d c e , …..

Para obtener el total de formaciones imaginemos
Como se ubicarían en el siguiente cuadro:

En el 1º casillero pueden ir cualquiera de las 5 personas,

En el 2º cualquiera de las 4 restantes, el 3º cualquiera de las 3 que quedan, y así sucesivamente.

Aplicando el principio de la multiplicación, tendremos: 5.4.3.2.1 = 5! = 120 formas

O aplicando la fórmula: P_5 = 5! = 120

En general: **hay n! maneras de ordenar n elementos**

II- Variaciones sin Repetición:

Definición: Dado un conjunto finito de "n" elementos, agrupados de a "k" elementos (k≤n) , llamamos **variación simple** de "n" elementos de orden "k" , a todo sub–conjunto ordenado formado por "k" objetos cualesquiera elegidos entre ellos , conviniendo en considerar como **distintas dos variaciones** cuando: **difieren en algún elemento** ó **si tienen los mismos elementos** entonces **están en distinto orden.**
La fórmula que permite calcular **todas** *las variaciones de "n" elementos agrupados de a "k"* elementos es:

$$\textbf{II} \quad V_{(n,k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \text{con } k \le n$$

Ejemplo: *Se sabe que un código admite cuatro números diferentes del 0 al 9, pero es desconocido, ¿Cuántas pruebas serán necesarias para chequear todos los casos?*

Respuesta: Designemos al conjunto de dígitos con A:

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } , su cardinal **n** = 10 y las opciones con k = 4 .

Determinaremos de cuantas formas se pueden llenar esos 4 casilleros. Lo razonamos:

Para el 1º tendremos todas las posibilidades o sea n = 10
Para el 2º " los restantes 9 (o sea n – 1)
Para el 3º " " " 8 (o sea n – 2)
Para el 4º " " " 7 (o sea n – 3)

Aplicando el principio de la multiplicación, resulta: 10.9.8.7 = 5040 códigos

Simbólicamente: $V_{(10,\,3)}$ = 10.9.8.7 = 5040 códigos

Si aplicamos la expresión II , resulta: $V_{(10,3)} = \dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10.9.8.7.\cancel{6}!}{\cancel{6}!} = 5040$

Observación: Es importante destacar la diferencia entre cada código formado.
Veamos algunos de ellos:

1	2	3	6

1	2	4	6

1	2	6	3

Se puede observar que mientras el primer código difiere del segundo en el 3º casillero, el tercero y el primero difieren en el orden en que están ubicados los mismos números.

Es por ello que: en este tipo de problemas, la conformación de los arreglos depende de la presencia de al **menos un elemento diferente,** y además **del orden** que vayan cambiando los elementos elegidos.

III- Combinación sin repetición

Definición: Dado un conjunto finito de "m" elementos, agrupados de a "k" elementos, (k < □m), llamamos **combinación simple** de "m" elementos de orden "k", a todo sub–conjunto ordenado formado por "m" objetos cualesquiera elegidos entre ellos , **conviniendo** en considerar **como distintas dos combinaciones** cuando: **difieren en al menos algún elemento.**

La fórmula que permite calcular **todas** las combinaciones de "m" elementos agrupados de a "k" es $C_{(n,k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!.\,k!}$ con k < n *

Ejemplo:

"*Javier, Gonzalo, Manuel, Pamela y Paola se han postulado a la directiva de su curso, pero solo 3 de ellos pueden quedar, ¿Cuántas directivas posibles hay?.*

Rta: llamamos con n al número total de candidatos y con k a las comisiones (k=3 , n= 5)

Por el tipo de problema, estas comisiones **van a diferir entre si** con solo cambiar **al menos una** persona, **no importa el orden** como se vayan formando pues no esta definida la función que van a cumplir cada una de ellas (diferente del caso anterior).

Luego aplicando la fórmula: $C_{(5,3)} = \dfrac{5!}{(5-3)!.\,3!} = \dfrac{5.4.3!}{2!.3!} = 10$ comisiones directivas

Hay problemas que se presentan en forma combinada.

Por ejemplo:

"¿Cuánto números diferentes de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1,8,4,3,5, con la condición de que sean pares ?"

Rta: Conviene reducir 1º el problema a un caso más simple:

Formar número de tres cifras que terminen en 4. El caso es el de variación de n= 5 , tomados de a k = 3: $V_{(5,3)} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5.4.6.3.2!}{2!} = 360$

Formamos números de 3 cifras que terminen en 8. Es el mismo caso: 360 nros

Luego por la regla de la Adición, sumamos y obtenemos: 720 números pares

2.8 - EJERCICIOS PROPUESTOS:

18- Aplica las reglas dadas a los siguientes problemas:

a) Un comerciante tiene 5 marcas diferentes de desodorantes y 4 tipos distintos de perfumes. Planea lanzar una promoción de un desodorante y un perfume ¿Cuántas ofertas serán posibles?

b) Se desea realizar un viaje directo de Rosario a Bs As . Se disponen de 6 líneas distintas de empresas de colectivos, 2 líneas de avión y una línea de tren. ¿De cuántas formas diferentes se puede viajar?

c) Para un casting , de una familia formada por un varon, una mujer y un niño, se presentan 4 hombres, 5 mujeres y 3 niños.¿Cuantas ternas posibles existirán?

d) Una empresa de turismo tiene como oferta para viajar a Punta del Este, cuatro posibles hoteles de diferentes categorías y tarifas ; y la posibilidad de elegir para el traslado, en forma aérea, en colectivo o en forma particular.¿ Cuántos paquetes de oferta distintos se pueden armar?

19- ¿De cuántas formas se pueden ubicar 6 alumnos en una fila de 6 asientos?

20-¿Cuántas banderas tricolores se pueden confeccionar con tres franjas de tela, una de color verde, otra blanca y otra amarilla?

21- ¿Cuántas palabras diferentes, con o sin significado, se pueden formar con las Letras de la palabra BIENES, sin que ninguna letra se repita ni falte?

22- ¿Cuántas permutaciones simples pueden hacerse con las letras de la palabra HABER que comiencen con la letra A? ¿Cuántas comenzarán con una vocal? En el mismo problema ¿Cuántas comenzarán con una consonante?

23-Problemas de numeros:

a)¿Cuántos números de 4 cifras distintas se puede formar con los dígitos:1,2,3,4,5?

b) ¿Cuántos números de 3 cifras sin repetir pueden formarse con los dígitos del número: 56.786 ?

c)¿Cuántos números de dos cifras pares pueden formarse con los diez dígitos?

d) ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 , que no empiecen con 0?

24- A un grupo de cuatro personas les han regalado dos entradas, una mejor y otra peor, para ir al teatro. ¿De cuántas formas se las pueden repartir?

25- A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y lo inedito. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?

26- Un pastelero dispone de 7 ingredientes para armar sus tortas, ¿Cuántas tortas distintas de 3 ingredientes (sin que se repitan los ingredientes), podrá hacer?.

27 ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir una comisión de 5 miembros a partir de 8 de personas si una persona determinada debe estar siempre incluida?

28- Resuelve los siguientes problemas indicando el tipo que corresponde.
Se pueden presentar casos en que tengas que aplicar en un mismo problema mas de una vez alguna de las tres fórmulas , tal vez junto con el principio de la multiplicación o adición:

a) ¿De cuántas formas pueden ser colocados 10 automóviles en un stock, si 3 de ellos son Fiat, 4 son Ford, 2 son Toyota y 1 es BMW?

b)¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar con las letras m, n, p, a, i, o de tal manera que no aparezcan 2 vocales ni 2 consonantes juntas?

c) La computadoras fabricadas por cierta compañía tienen un número de serie que consta de una letra del alfabeto seguida de un número de cinco dígitos. Si se han utilizado todos los números de serie de este tipo, ¿Cuántos conjuntos de computadoras se han fabricado?

d) ¿Cuántas comisiones diferentes, compuestas por 2 hombres y 3 mujeres, pueden formarse, a partir de 10 hombres y 12 mujeres?

e) Se tienen los números 5874 y 12369. ¿Cuántos números enteros diferentes pueden formarse con 2 cifras no repetidas del primero y 3 no repetidas del segundo?

f) ¿Cuantos números hay entre 2.000 y 6.000, que contengan los dígitos 0,1,3,5,7 sin repetición?.

29- Señala la opción correcta de las respuestas a los problemas que se plantean:

1. ¿Cuántos cables de conexión son necesarios para que puedan comunicarse directamente 2 oficinas de las 8 que hay en un edificio?

   A) 20 B) 56 C) 28 D) 14 E) 16

2. ¿Cuántos números múltiplos de 5, menores que 4000 y de cifras diferentes se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?

   A) 108 B) 491 C) 528 D) 392 E) 372

3. ¿Cuántos números de 3 cifras que sean impares, se pueden escribir con los dígitos: 4, 5, 7, 9 y 8, si no se pueden repetir los dígitos?

   A) 20 B) 56 C) 28 D) 14 E) 36

4. Hay 5 candidatos para presidente de un club, 6 para vicepresidente y 3 para secretario.¿De cuántas maneras se pueden ocupar estos tres cargos?

   A) 108 B) 64 C) 128 D) 72 E) 90

5. De seis números positivos y 5 números negativos, se escogen 4 números al azar y se multiplican. Calcular el número de formas que se pueden multiplicar, de tal manera que el producto sea positivo

   A) 60 B) 96 C) 128 D) 140 E) 170

6. En un examen de matemáticas, un estudiante debe responder siete preguntas de las diez dadas.¿De cuántas formas diferentes debe seleccionar, si el debe responder por lo menos, tres de las cinco primeras preguntas?

   A) 64 B) 55 C) 50 D) 110 E) 120

2.9- NUMERO COMBINATORIO:

Sean n, k $\in N_0$, con k $\leq$ n Se llama número combinatorio “n sobre k” y se escribe

$\binom{n}{k}$ al número natural definido como:

$$\boxed{\binom{n}{k} \text{ def= } \frac{n!}{(n-k)!.k!}}$$

Ejemplo: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!.3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3.2.1} = 35$

Números Combinatorios Complementarios:

Dos números combinatorios son complementarios cuando tienen igual numerador y la suma de los denominadores coinciden con el numerador.

Ejemplo: $\binom{6}{2}$ y $\binom{6}{4}$ son complementarios

Propiedades de los números combinatorios

Propiedad 1 : Dos números combinatorios complementarios son iguales

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{Ej.: } \binom{7}{4} = \binom{7}{3}$$

Propiedad 2: (Fórmula de Stieffel)

En general la suma de dos números combinatorios no da otro número combinatorio, salvo cuando los numeradores son iguales y los denominadores son consecutivos.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \qquad \text{Ej. : } \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$$

Triángulo Aritmético

La **propiedad 2** de número combinatorio y los **resultados** dados en la actividad 15, permiten el cálculo rápido de los números combinatorios de numerador n , conocidos los n–1

Partimos de n = 0 y los posibles denominadores **k ≤ n** , y los completamos:

n = 0 (k=0) $\binom{0}{0}$

n = 1 (k= 0 o k= 1) $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

n = 2 $\binom{2}{0}$ $\binom{}{}$ $\binom{2}{2}$

n = 3 $\binom{3}{}$ $\binom{}{}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{}{}$

n = 4 $\binom{}{}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$

Si resolvemos cada nº combinatorio, teniendo en cuenta que los extremos de cada fila valen 1 y que cada número combinatorio restante, es la suma de los dos que figuran en la fila anterior sobre él (según P2), resulta el siguiente triángulo Aritmético: (atribuido a **Tartaglia)**.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

…………………………………………………………… Y así sucesivamente

Veamos la **aplicación** que le podemos dar a este triángulo aritmético

POTENCIA DE UN BINOMIO:

Tratemos de deducir la fórmula de la potencia n-sima de un binomio , o sea $(a+b)^n$.

Recordando algunos casos conocidos, intentemos completar para n = 4 y n = 5 :

Para $n = 0$, $(a + b)^0 = 1$ (1 término)

Para $n = 1$, $(a + b)^1 = a + b$ (2 términos)

¨ $n = 2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,.\,b + b^2$ (3 términos)

¨ $n = 3$, $(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$ (4 términos)

Para $n = 4$,

Para $n = 5$,

De acuerdo a los desarrollos realizados y sus respectivos exponentes, se observa que:

- El número de términos es uno más que el exponente. Si es n, son n +1 términos.
- Los coeficientes de cada término son los números del triángulo aritmético. Es decir los números combinatorios desde n = 1 hasta n =3
- El 1er término del binomio (**a**) está elevado a la enésima potencia y luego va decreciendo con n-1, n-2, ..., hasta 0 ; mientras que el 2º término (**b**) va aumentando desde 0 hasta n.
  (Por ej. : $a^3 = a^3.b^0 + a^2\,.b$ ....+ $b^3 = a^0.\,b^3$)

En general para un exponente n, se cumple:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n.b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + .. + \binom{n}{n-1} a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0.b^n \qquad \text{(III)}$$

Binomio de Newton:

Sean a, b $\in \Re$ y n $\in$ N .
Entonces , para la potencia n-ésima del binomio (a+b) se tiene

$$\mathbf{(a + b)^n} = \sum_{ki=0}^{n} \binom{n}{k} .a^{n-k}.b^k \qquad \text{(IV)}$$

Observaciones:

* La expresión (IV) es igual a la (III) y se puede demostrar por el método de inducción completa (no la haremos).

- Cuando desarrollamos la expresión (III) , antes de aplicar las potencias en cada término , la suma de los exponentes en cada término , es siempre n.

- Si n es par , se puede determinar el Término Central T_c directamente, de la forma:

  $T_c = \binom{n}{n/2} .a^{n/2} .b^{n/2}$

Ejemplo: de binomio de Newton:

$(x+2y)^5 =$

$$\binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2y + \binom{5}{2}x^3 \cdot (2y)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot (2y)^3 + \binom{5}{4}x \cdot (2y)^4 + \binom{5}{5} \cdot (2y)^5 =$$

$$x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

Donde el 5º término del desarrollo resulta:

$$T_5 = \binom{5}{4} x \cdot (2y)^4 = 80xy^4$$

2.10 - EJERCICIOS PROPUESTOS:

30- a) Obtener los siguientes números:

i) $\binom{5}{0} =$ ii) $\binom{4}{3} =$ iii) $\binom{8}{8} =$ iv) $\binom{4}{1} =$

31- Calcula: a) $\binom{9}{2}$ b) $\binom{100}{99}$ c) $\binom{9}{7} - \binom{8}{6}$

32- Verificar los resultados siguientes cualquiera sea *n* número natural:

i- $\binom{n}{0} = 1$ ii- $\binom{n}{1} = n$ iii- $\binom{n}{n} = 1$

a) Escribe el complementario de: $\binom{20}{18}$ y comprobar la propiedad 1

b) Aplicar la propiedad 2 y resolver: $\binom{9}{6} + \binom{9}{5} =$

c) Demostrar las **propiedades** de numeros combinatorios

33- Determina el valor de x que satisface las siguientes igualdades:

i) $\binom{7}{5} + \binom{7}{4} = \binom{x}{5}$ ii) $\binom{x}{2} = 36$ iii) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} = 4$

34- Calcular: $V_{(5,3)} + 2.C_{(6,5)}$

35- Aplicando la fórmula de la potencia de un binomio obtener el desarrollo de:

a) $(3x + 2y)^4 =$

b) $(x^2 + y^3)^4 =$

c) $(m - 3p^2)^5 =$

d) $(x^2y-2y^3)^5 =$

36- Obtener el término central de los desarrollos i e ii. Luego el termino de grado 8 de los restantes:

i) $(5x + 2x^2)^4 =$

ii) $(x^2 - y^3)^6 =$

iii) $(m - 0{,}5p^2)^5 =$

iv) $(xy-2y^2)^4 =$

37- En las siguientes potencias obtenga los cuatro primeros términos:

a) $(2 x^3 -1)^{10}$

b) $\left(\frac{a^3}{3c}+\frac{2b^2}{d^3}\right)^9$

c) $(x^2 y + 3 z^3)^9$

d) $(3 /m^3 + 2/3\, p^3 b)^5$

38- Calcula el valor de n:

a) $C_{n,2} = 36$

b) $56 = V_{n+6,2}$

c) $V_{n,3} = 9 . V_{n-1,4}$

d) $4. C_{n,2} = 12$

e) $V_{n,3} = 20 . V_{n,1}$

f) $C_{n,5} = C_{n,2}$

g) $n . V_{5,3} = 4! . C_{6,2}$

h) $V_{n,2} + V_{n-2,2} + V_{n-4,2} = 98$

39- Desarrollando los binomios, determinar:

a) $(- 2 t^4 + 5 b^2 c)^6$: el término central

b) $(4m^2 - ½ p^2)^4$: el o los término/s de grado 8.

c) el septimo término de $(4x - y^2)^9$

d) T_8 de $(x^2 y^3 - z^4)^{12}$

e) $(3 h - ½ k^2)^5$: el término de grado 8

f) $(x t^{-3} - 5/3 z^4)^4$: el coeficiente del término de grado 6

40- Expresar el producto del 6º por el 8º término en el desarrollo: $\left(\frac{d}{2}+d\right)^{12}$

41- Hallar “i” y el resultado de la potencia del binomio $(i+5)^4$, si el termino central es 90.