Guía de trabajos Teórico- Práctico Nº 3

UNIDAD III:

1.1. Cuerpo de los números reales.

1.2. Espacio vectorial. Vectores en R^n .Operaciones en R^n . Propiedades del espacio vectorial. Combinación lineal. Dependencia e Independencia lineal. Propiedades.

1.3. Matrices. Matrices especiales. Operaciones. Espacio vectorial de matrices. Producto de matrices. Propiedades. Matriz traspuesta

1.4. Matriz inversa. Operaciones elementales en una matriz. Matrices equivalentes. Método de Gauss Jordan. Rango de una matriz

1.5. Aplicaciones económicas.

1.1. Cuerpo de los números reales

Problema:

Plantea escribiendo las operaciones que se aplican en el siguiente problema:

Alberto tiene saldo negativo de –27.500 pesos en su cuenta bancaria. Para cubrir esta deuda deposita el 15% de su anticipo de $12.000 y, más tarde, consigue que un amigo deposite un cheque por 6.025,75 dólares. Si el dólar fue tasado por el banco en $3,80 , después de realizar los depósitos, ¿logró quedar con saldo a favor?

La reolucion no es dificil si se sabe que operaciones intervienen.Pero en otras situaciones se requieren de propiedades que cumplan las operaciones. Por ejemplo:

Supongamos nos piden reducir la siguiente expresion a otra equivalente, aplicando Axiomas del Cuerpo de los números Reales:

1. $(a^{-1} + 2b - \sqrt{3}) - 2(a^{-1} + b + 0) + \sqrt{3}$

Es probable que Ud no conozca del todo estos axiomas, pero se anima a “resolver”

Responde:

i- ¿Cómo lo haría?¿hace falta saber los valores de a y de b para tal objetivo?

ii- ¿ Qué resultado se obtiene?¿Qué significado le da?

iii- ¿Cuántas operaciones entre números reales conoces?¿Se pueden deducir unas de otras?

Para responder estas y otras cuestiones asociadas, presentaremos la estructura de **Cuerpo de** los **Números Reales**.

Comenzamos con definir dos leyes de composicion interna en R : suma + y producto .

En la siguiente actividad en un cuadro hay un listado de axiomas de cada operación.

Actividad 1:

Completa el cuadro colocando la forma simbólica correspondiente a los axiomas de cada operación definida, usando α, β, δ como representación de números reales cualesquiera.

Axiomas de la suma	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de opuesto	
Conmutativa	

Axioma:

Es un enunciado matemático que NO necesita demostracion. Son proposiciones verdaderas absolutas que no necesitan ser demostradas por ningun metodo.

Axiomas del producto	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de inverso	
Conmutativa	
Distributiva respecto de la suma	

En la siguiente actividad se propone propiedades, que se pueden demostrar a partir de los axiomas(no lo haremos)

Actividad 2:

Propone en ejemplo de cada propiedad o definicion:

$\forall\ \alpha , \beta \in \Re$	Ejemplo
Prop. $\alpha.0 = 0$	
Prop. $-1.\ \alpha = -\alpha$	
Prop. $(-\alpha) . \beta = -(\alpha.\beta) = \alpha.(-\beta)$	
Prop. $-(\alpha+\beta) = -\alpha + (-\beta)$	
Def.: $\alpha^{-1} = 1/\alpha$	
Def.: $\alpha : \beta = \alpha.\beta^{-1}$	
Prop. $(\alpha.\beta)^{-1} = \alpha^{-1}.\ \beta^{-1}$	

En resumen:
El conjunto R con las operaciones definidas: + y ., con los axiomas y las propiedades contituyen una estructura algebraica llamada CUERPO CONMUTATIVO y lo notamos con **(R, +, .)**
En esta unidad a sus elementos los llamaremos **escalares,** y los notaremos con letras griegas

Actividad 3:

Demostrar aplicando axiomas y/o propiedades :

i- $a + b - a = b$
ii- $-a + b + 1 – ab$
iii- $ab + b – ab + bc = 1 – c$
iv- $a(a^{-1} + b) – 1 = ba$

1.2. Vectores y Espacio vectorial

Introducción:

Veamos otra estructura algebraica. Observa los siguientes conjuntos:

$R^2 = \{ (x, y) / x \in R , y \in R\}$ (conjunto de los pares ordenados de números reales)

$R^3 = \{ (x, y, z) / x \in R , y \in R, z \in R\}$ (conjunto de las ternas ordenadas de números reales)

$R^4 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 ,x_4) / x_1 \in R , x_2 \in R, x_3 ,x_4 \in R\}$

…………………………………………………..

$R^n = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , \ldots, x_n) / x_1 \in R , x_2 \in R, \ldots\ x_n \in R\}$ (Las n-uplas ordenadas de números reales

¿Qué operaciones , axiomas y propiedades se pueden aplicar entre los elementos de estos conjuntos?

Para abordar estos diferentes conjuntos y estructurarlos de una sola forma general, tendremos 1º que convenir en definir un solo conjunto que los represente en la definición axiomática.

Llamaremos a cada uno de estos, Conjunto de vectores y lo representaremos con la letra V y un elemento cualquiera de ellos lo notaremos con $\vec{v}$ **.**

A partir de un conjunto cualquiera de **vectores V ,** un **cuerpo (K,+, .**) **de escalares** y **axiomas**, definiremos Espacio Vectorial

ESPACIO VECTORIAL

Dados *V* (conjunto de vectores) , R conjunto de escalares, y las operaciones:

+ : suma de vectores (ley de composición interna en V)
• : producto de un escalar de K por un vector de V (Ley de composición externa en V),

Definimos Espacio Vectorial a la cuaterna (V,+ , R, •) , si se cumplen los axiomas siguientes:

A) **Respecto de la suma**:

Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
Conmutativa: $u + v = v + u$
Vector nulo: $u + 0_v = u$
Vector opuesto: $u + (-u) = 0_v$

B) **Respecto del producto de escalar por vector**:

$\alpha \bullet (u + v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$
$(\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u + y \bullet u$
$(\alpha.\beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$
$1 \bullet u = u$

Actividad 4:

Probar que el conjunto R^2 tiene **estructura de Espacio Vectorial** con la **suma usual sobre** el **cuerpo R**

Observa los siguientes conjuntos finitos de vectores:

A={ (1,-2) , (2, -4), (-4 , 8)} , B = { (1, 2, 0) , (-3,1, 0) (5, -8 , 0) } , C= { (1,0), (0,1) }

¿En que conjunto de vectores esta incluido cada uno?

¿Qué relación encuentras entre los vectores de un mismo conjunto?

Esta ultima pregunta la podemos responder con propiedad y en forma mas amplia, si previamente analizamos las siguientes definiciones:

SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea $W \subseteq V$ y $W \neq \varnothing$. W es subespacio de V (espacio vectorial) si cumple:

- Para todo $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
- Para todo $u \in W$ y para todo $\alpha \in R$ (cuerpo de los números reales) $\Rightarrow \alpha u \in W$

Por ejemplo: $W=\{(x,-2x) / x \in R\}$ es un S.E.V. de R^2 y $A \subset W$

COMBINACIÓN LINEAL

Un vector v es una **combinación lineal** de los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, si, para unos ciertos escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (llamados coeficientes), se cumple:

$$v = \alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + ... + \alpha_n . v_n$$

Se dice también que el vector v **depende linealmente** de los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Ejemplo:

El vector (2, -5, -1) es una combinación lineal de los vectores (2, -1, 3) y (1, 0, 2), ya que se cumple que existen escalares 5 y -8 , tales que:

$$5. (2, -1, 3) – 8. (1, 0, 2) = (2, -5, -1)$$

DEPENDENCIA LINEAL

Dada la combinación lineal igual al vector nulo: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0_v$

(Donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son escalares y $v_1, v_2, ..., v_n$ y 0_v vectores)

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, los vectores son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**.

Si existe algún α_i distinto de cero los vectores son **LINEALMENTE DEPENDIENTES**.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

W es una base de V (espacio vectorial) si y solo si:

- Los vectores de W son linealmente independientes y los vectores de W generan V.

  Ejemplo: En el espacio R^2 , **los vectores canónicos (1,0) y (0,1)** son **una base**.

Ejercicios :

5- Dados los vectores:

$$\vec{u} = (-2{,}4{,}6) \qquad \vec{v} = (-1{,}3{,}-5) \qquad \vec{w} = (300{,}400{,}600)$$

Completa:

i) El opuesto de $\vec{v}$ se simboliza con…... y su valor es ………………

ii) El vector $0{,}001.\vec{w}$ es …………………..

iii) Expresa el vector $\vec{u}$ como el producto de un escalar por otro vector…………………….

iv) La suma de $\frac{1}{10}\vec{w} + 3.\vec{u}$ es el vector …………………..

vi) 0 por el vector $\vec{u}$ es ………………………..

vii) Si se aplica la propiedad distributiva de -1 con respecto a la suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene:

……………………………………………………………………….

viii) Los vectores canónicos de R^3 son: …………………………………………………………

6- Efectuar la combinación lineal:

a) $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2}$ si $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ y $\mathbf{v_1} = (-2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (4,-1)$

b) $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3}$ si $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$ y
$\mathbf{v_1} = (-3, 6, -2)$, $\mathbf{v_2} = (3,0,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-3,1,0)$

c) trivial si $\mathbf{v_1} = (0,-1,8)$, $\mathbf{v_2} = (-3,-1,4)$

7- Encontrar los escalares, si es que existen, para que el vector (-4, -2, 7) sea combinación lineal de:

a) los vectores canónicos de R^3.
b) los vectores (4, 0, -7) y (-4, -1, 7)
c) los vectores (-1, -2, 3) y (1, -4, 2)

8- Analizar si el vector *u* es una combinación lineal de los vectores v_i

a) $\vec{u} = (5,-7)$, $\vec{v}_1 = (-1,3)$, $\vec{v}_2 = (2,-2)$

b) $\vec{u} = (-1,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (1,1)$

c) $\underset{\rightarrow}{u} = (2,-1,4)$, $\underset{\rightarrow}{v}_1 = (1,0,3)$, $\underset{\rightarrow}{v}_2 = (0,-1,1)$, $\underset{\rightarrow}{v}_3 = (-2,0,-6)$

9- Analizar la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores. (si son L. I. o L. D.)

a) $2,0 \;,\; 1,-1$

b) $-1,3 \;,\; 4,-12$

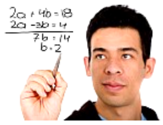
c) $1,0,-1 \;,\; -1,1,0 \;,\; 0,-1,2$

d) { (-2, 1, 3), (1, 2, 1) , (0, 5 , 5) }

Matrices

Problema I:

En un supermercado grande, se ha lanzado una oferta de cajas de salsa de tomate, paquetes de azúcar y de harina . Una señora compro 2 cajas de salsas de tomate, 4 paquetes de azúcar y un paquete de harina, gastándose $17,70 .Otra compró una caja de tomate, 2 paquetes de azúcar y devolvió un paquete de harina que perdía, pagó en total $ 5,10 , y otra compró 3 paquetes de azúcar y devolvió 2 paquetes de harina por estar vencidos, se gastó $ 3,70.
¿En que consistió la oferta?



La respuesta al problema se reduce a plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+4y+z &= 17{,}70 \\ x+2y-z &= 5{,}10 \\ 3y-2z &= 3{,}70 \end{cases}$$

Cuando uno trabaja con sistema de ecuaciones lineales ordenadamente, opera siempre con los mismos símbolos. Así la información esencial queda perfectamente expresada:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 17{,}70 \\ 1 & 2 & -1 & 5{,}10 \\ 0 & 3 & -2 & 3{,}70 \end{array}$$

Esta forma de expresar el problema propuesto es un ejemplo de ***matrices.***

Problema II

Una compañía de automóviles recoge sus ventas en una ***matriz .***
En las ***filas*** *se reflejan los distintos modelos: XL, DELTA , LUXE y Max.*
En las ***columnas*** *se recogen los distintos colores: rojo, azul , gris y negro.*

Se conocen los datos de los últimos dos años (en unidades de cien):

$$\text{Ventas 2007} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Ventas 2009} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Durante 2007 ¿Cuántos coches del modelo DELTA azul se vendieron?

b) ¿En qué año se vendieron mas unidades del modelo XL negro?

c) ¿En qué año se vendieron mas unidades del modelo LUXE ?

d) Se plantea aumentar el 50% de las unidades XL del año 2009 y 25% de las Max , el resto sigue igual. En ese caso ¿Cuántas unidades se venderán en el año 2010?

La respuesta no es difícil si entendemos a que le llamamos filas y a que columnas, además no son las únicas matrices con las que trabajaremos. ¿Qué es una matriz?¿Qué tipos hay?

Veamos algunas definiciones que nos ayudarán a comprender el tema.

Matriz de orden mxn:

Es un arreglo o disposición rectangular de números (pueden ser reales o complejos) , los cuales se hallan ubicados en m filas y n columnas.
Los números en un arreglo se denominan elementos de la matriz y los denotaremos genéricamente con $a_{i\,j}$ para designar a que fila y columna hace referencia según su ubicación.

Notación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Otra forma simbólica de notar la matriz A es:

A = $(a_{i\,j})$ con $i = 1, 2, ..m$ y $j = 1, 2, ...n$

La matriz es otro tipo de **vector**

El **orden** o tamaño de la matriz *A* se escribe ***m x n*** .

Donde: *m* indica el número de filas y *n* el número de columnas de la matriz.

Al **conjunto** de todas **las matrices** de **m filas x n columnas lo notamos** con R^{mxn}

Así si una matriz A tiene ese orden, diremos que : $A \in R^{m\,x\,n}$

Actividad 10:

a) Expresa la matriz A de orden 3 x3 donde todos los elementos de la diagonal principal sean iguales a -4 y el resto sea 0.

Es decir : A = (a_{ij})$_{3x3}$ donde se define $a_{i\,j} = \begin{cases} -2 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$

b) Escribir las matrices definidas de la siguiente forma:

$A \in R^{4x1}$, A = (a_{ij}) con $a_{i\,j} = (-1)^{i-j}.(i+j)$

$B \in R^{3x3}$, B = (b_{ij}) con $b_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i > j \\ i+2j & si \quad i \leq j \end{cases}$

Actividad 11:

Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de papas, manzanas y naranjas a un precio de 10, 12 y 15 \$ / kg., respectivamente.
El importe total de la compra fueron \$ 116. El peso total de la misma es de 9 kg.
Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.

Utilizar una **matriz** para consignar la información esencial que se brinda en el problema.

Igualdad de Matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Diremos que la matriz *A* es igual a la matriz *B* si y solo si tienen el mismo tamaño u orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Simbólicamente: $A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Veamos su aplicación en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + y + z = -3 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ -x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Que lo podemos expresar como la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 4x + y + z \\ 3x - y + 2z \\ -x + 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Actividad 12:

a) Analizar si M = N y N = P , siendo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1x + 4y \\ 3x + 6y \\ 5x + 2y \end{pmatrix}$

b) Calcular el valor de las incógnitas a_{ij} y b_{ij} sabiendo que se cumple la igualdad:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -3^2 \\ a_{21} & 1 - a_{11} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2a_{21} - 2 & b_{13} \\ -2 & b_{22} & b_{22} - 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Actividad 13:

(Inventario de una librería)

El inventario de una librería de la carrera de Ciencias Económicas es:

Libros de: Derecho 80 , Contabilidad 160 , matemática 120 y Administración 240
Apuntes de : derecho 40, Contabilidad 120 , Matemática 80 y Administración 160

a) Represente mediante una matriz A , el inventario de esa librería.

b) Dado que una matriz también es un vector, expresar como el producto de un escalar por una matriz en forma conveniente, de manera que los elementos de esta última sean números de un dígito.

c) Si la biblioteca de la Universidad tiene el 10% de ese material ¿Cuál es la matriz en ese caso?

1.3 Matrices Especiales

Se considerarán ciertas clases de matrices que tienen formas especiales.

Matriz Nula: Es una matriz cuyos elementos son todos nulos, y la notamos con 0_{mxn}

Simbólicamente: $0_{mxn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ Ejemplo: $0_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{2\,x\,3}$

Matriz Cuadrada: *Cuando* **m = n** (el número de columnas y el número de filas coincide),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ y la expresamos $A \in R^{n\,x\,n}$

Los elementos a_{11} , a_{22} , a_{33} , ...,a_{nn} se ubican en lo que llamaremos **diagonal principal** de *A*.

Otra forma de expresar la matriz cuadrada A es escribir en **una** fila las **n** columnas:

$$A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n) \quad con\, 1 \le j \le n$$

Nota: Si $\boldsymbol{m \neq n}$, la matriz se llama Matriz Rectangular.

Matriz Identidad o Unidad: Es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1(uno) y los restantes elementos son nulos.

Simbólicamente:

Sea $I_n \in R^{n\,x\,n}$, $I_n = \begin{cases} 1 \text{ , si } i = j \\ 0 \text{ , si } i \neq j \end{cases}$ $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Ejemplo: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

Simbólicamente: $D \in R^{nxn}$

D *es matriz diagonal* $\Leftrightarrow a_{i\,j} = 0 \quad \forall\, i \neq j$ $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$ Ejemplo: $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En particular: en R^{nxn} la matriz identidad y la matriz nula son matrices diagonales.

Matriz Escalar: Es una matriz diagonal con elementos iguales.

Simbólicamente:

Sea $E \in \Re^{nxn}$, E *es Matriz Escalar* $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ , } si\ i = j \\ 0 \text{ , } si\ i \neq j \end{cases}$, $E = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Superior.

$A \in R^{n\,x\,n}$ *es Triangular Superior* $\Leftrightarrow a_{i\,j} = 0 \quad \forall\, i > j$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Nota: No se impone ninguna condición sobre los elementos situados en la diagonal principal o por encima de ella. Estos también pueden ser ceros

Matriz Triangular Inferior.

$A \in R^{n\,x\,n}$ *es Triangular Inferior* $\Leftrightarrow a_{i\,j} = 0 \quad \forall\, i < j$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Nota: No se impone ninguna condición sobre los elementos situados en la diagonal principal o por debajo de ella. Pueden también ser ceros

***Matriz Simétrica**:* $A \in R^{n\,x\,n}$ *es Simétrica* $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i,j = 1,2,\ldots,n$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz Antisimétrica: $A \in R^{n\,x\,n}$ *es Antisimétrica* $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\, i,j$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: Los elementos de la diagonal principal de toda matriz Antisimétrica son **nulos** siempre.

Actividad 14:

Indica el orden y el tipo de matriz : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema III:

Don Antonio tiene dos estaciones de servicio, una en el centro y otra en el sur de la Ciudad. Durante el primer fin de semana de mayo, las estaciones registraron las ventas de combustibles representadas por las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \\ centro \\ sur \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} diesel & super & super\ plus \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1200 & 750 & 650 \\ 1100 & 850 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ centro \\ sur \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} diesel & super & super\ plus \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1260 & 860 & 520 \\ 1160 & 750 & 750 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Halle la matriz que represente el total de ventas realizado en los dos días.

b) Si el lunes las ventas son siempre el 10% mas de la del día anterior ¿Cuál resulta ser la nueva matriz?

Si podemos responder a estas pregunta es porque estamos sumando matrices y multiplicando Escalar por matrices:

Suma de Matrices

Sean A $\in \Re^{mxn}$ y B $\in \Re^{mxn}$ matrices del mismo orden.
Se puede obtener otra matriz C = A + B , al sumar los elementos de *A* con los elementos correspondientes de *B*.

Simbólicamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

En función de sus términos genéricos resulta: $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ luego $A + B = C$

De forma análoga se define:

RESTA de matrices: $A - B = C \iff \forall\, i, j : a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ $L - M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Nota:

No es posible Sumar o Restar matrices de tamaños u orden diferentes.

Producto de un Escalar por una Matriz.

Sean $A \in R^{m\,x\,n}$ y $\alpha \in$ R

Si *A* es cualquier matriz y α es cualquier escalar entonces el producto $\alpha . A$ es la matriz que se obtiene de multiplicar α por cada elemento de *A* .

Ejemplo: Sean: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\alpha = -3$ $\quad -3.B = -3.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$

Simbólicamente:

$$\alpha.A=\alpha.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \dots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \dots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \dots & \alpha.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Suma de Matrices.

S1: La Suma de matrices es Asociativa.

$$\forall A,B,C\in K^{mxn}:(A+B)+C=A+(B+C)$$

S2: Existe Neutro respecto de la Suma de matrices. Es la matriz nula

$$\exists\ 0_{mxn}\in R^{mxn}/\ \forall A\in R^{mxn}:\ A+0_{mxn}=0_{mxn}+A=A$$

S3: Existe Inverso aditivo para cada matriz respecto de la suma de matrices

$$\forall A\in R^{mxn},\exists\ -A\in R^{mxn}/:\ A+(-A)=(-A)+A=0_{mxn}$$

S4: La suma de matrices es Conmutativa

$$\forall A,B\in R^{mxn}\ :\ A+B=B+A$$

Propiedades del Producto de un Escalar por una matriz.

Pr1: El Producto de un Escalar por una Matriz es Asociativa Mixta.

$$\forall A\in R^{mxn},\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha.\beta).A=\alpha.(\beta.A)$$

Pr2: Distributividad del producto en R^{mxn} respecto de la suma en *R*.

$$\forall A\in R^{mxn},\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A$$

Pr3: Distributividad del producto en *R* respecto de la suma en R^{mxn}.

$$\forall\alpha\in R\wedge\forall A,B\in R^{mxn}:\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$$

Estas propiedades confieren al conjunto **(R^{mxn} , +, R , .) la estructura de E.V.**

Actividad 15:

Efectuar C + D , A – B , C – 0,5.D y 2A – 2B , con las matrices A ,B, C y D :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 6 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Actividad 16:

Sabiendo que: $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$

a) Obtener el opuesto de cada matriz.

b) Verificar la propiedad conmutativa de la suma.

c) Resolver de dos formas diferentes $\frac{1}{5}$.(5.A - 10.B)

Actividad 17:

Determinar la matriz X $\in R^{2x2}$ en la siguiente ecuación matricial:

$$3.X + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Problema III:

El número de acciones que posee Andrés está dado por la matriz

$$\begin{array}{cccc} & GM & IBM & BAC \\ A = & (600 & 400 & 120) \end{array}$$

Al cierre de la bolsa, cierto día los precios (en dólares por acción) de estas acciones es:

$$B = \begin{pmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{array}{l} GM \\ IBM \\ BAC \end{array}$$

¿Cuál será el valor total de las acciones de Andrés ese día?

La respuesta a este problema esta en el producto de A.B que es posible por el orden de cada uno.

A.B = $(600 \quad 400 \quad 120) . \begin{pmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{pmatrix}$ = 600.50 + 400.120 + 120.42 =

Veamos en general como se efectúa la multiplicación de matrices

Producto de Matrices

Sean $A \in R^{m\,x\,p}, B \in R^{p\,x\,n}$ con $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$

Definimos la matriz producto C $\in \Re^{mxn}$ / C =(c_{ij}) , de la siguiente forma:

$$A\,.\,B = C \Leftrightarrow c_{i\,j} = \sum_{K=1}^{p} a_{i\,k}.b_{k\,j} = a_{i\,1}.b_{1\,j} + a_{i\,2}.b_{2\,j} + \ldots. + a_{i\,j}.b_{j\,j} + \ldots.. + a_{i\,p}.b_{p\,j}$$

Es decir:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix} = C$$

Para obtener c_{11} se realiza el producto de la **fila 1** de la primera matriz por la **columna 1** de la segunda matriz, es decir: $c_{11} = a_{1\,1}.b_{11} + a_{1\,2}.b_{2\,1} + \ldots\ldots. + a_{1\,p}.b_{p\,1}$

Para obtener c_{21} se realiza: $c_{21} = a_{2\,1}.b_{11} + a_{22}.b_{2\,1} + \ldots\ldots. + a_{\,2\,p}.b_{p\,1}$

(El producto de la **fila 2** de la matriz A por la **columna 1** de la matriz B)

Ejemplo:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.(-3) & 1.3 + 0.2 & 1.(-2) + 0.0 \\ (-3).1 + 1.(-3) & (-3).3 + 1.2 & (-3).(-2) + 1.0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Condición Necesaria para el Producto de Matrices

El producto de dos matrices es posible siempre que el número de **columnas** de la primera matriz sea igual al número de **filas** de la segunda matriz factor.

Es decir, si la matriz *A* es de orden *m x p* y la matriz *B* es de orden *p x n*, entonces es posible obtener otra *C* = A.B de orden *m x n* .

$$\underbrace{mx\overset{\uparrow}{p} \quad \overset{\uparrow}{p}xn}_{\text{iguales}}$$

Actividad 18:

Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S(sencillas), N(normales) y L(lujo). Cada vivienda de tipo S tiene 1 ventana grande, 7 medianas y1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.

Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y2 bisagras.

a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el numero de cristales y el número de bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcular una matriz, a partir de las anteriores, que exprese el número de cristales y bisagras necesarios en cada tipo de vivienda.

Propiedades del Producto de Matrices.

Prop._01: El Producto de Matrices es Asociativa.

$$\forall A \in R^{mxp}, B \in R^{pxn}, C \in R^{nxt} : (A.B).C = A.(B.C)$$

Prop._02: Distributividad del Producto respecto de la Suma de matrices .

$$\forall A \in R^{mxp}, B \in R^{pxn}, C \in R^{pxn} : A.(B + C) = A.B + A.C$$

Prop._03: $\forall A \in R^{mxp}, B \in R^{pxn}, \alpha \in R : \alpha.(A.B) = (\alpha.A).B = A.(\alpha.B)$

Prop. 04: Si A $\in \Re^{nxn}$, I_n es el neutro para el producto: $A.I_n = I_n.A = A$

Observación:

En general, el producto de matrices **no es conmutativo**, es decir : $A.B \neq B.A$

Actividad 19:

Calcular los productos: B .C , E^2 y $E.I_2$, siendo :

B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Responde: ¿B.C = C.B ?

Actividad 20:

Encontrar una matriz *X* que verifique $X - B^2 = AB$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Actividad 21:

Calcula el valor de la incógnita para que se verifique: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Transpuesta de una Matriz

La Transpuesta de una matriz $A \in R^{m\,x\,n}$, es una matriz $B \in R^{n\,x\,m}$ que se obtiene al permutar filas por columnas en la matriz *A*.

Simbólicamente: *B* es la Transpuesta de *A* $\Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i,j$

Denotaremos a la matriz transpuesta de *A* como A^t

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la transpuesta de *A* es: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 22:

Sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Verifique que :

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$ ii) $A^t . B^t = (B.A)^t$ iii) $(A^2)^t = (A^t)^2$

Propiedades de la Transpuesta.

Prop_01: La Transpuesta de la Transpuesta de una matriz es la misma matriz. $\left(A^T\right)^T = A$

Prueba. $\left((a_{ij})^T\right)^T = \left(a_{ji}\right)^T = a_{ij}$

Prop_02: La Transpuesta de la suma de matrices es igual a la suma de las Transpuestas

$(A+B)^T = A^T + B^T$

Prueba. $\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^T = (c_{ij})^T = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (a_{ij})^T + (b_{ij})^T$

Prop_03: La Transpuesta del producto de un escalar por una matriz, es igual al producto del escalar por la Transpuesta de la matriz.

$\left(\beta . A\right)^T = \beta . A^T$

Prueba. $\left(\beta . a_{ij}\right)^T = \beta . a_{ji} = \beta\,(a_{ij})^T$

Prop_04: La Transpuesta del producto de matrices es igual al producto de las Transpuestas en orden permutado.

$$(A.B)^T = B^T . A^T$$

Nota: También se dice que una matriz **es simétrica** si coincide con su transpuesta ($A = A^t$) y Es **antisimétrica** si coincide con su transpuesta cambiada de signo ($A = -A^t$)

Actividad 23: Sea

A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 9 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$. Si se multiplica ½ por la suma de las matrices A y A^t ¿Qué se obtiene?

Problema IV:

Dado el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z & = & 6 \\ -3x + 6y - 5z & = & -1 \\ x - 3y + 7z & = & 0 \end{cases}$$

Si llamamos con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a la matriz columna de las incógnitas

a) Expresar en forma de matricial usando dos matrices mas A y B de forma tal que A.X = B

b) ¿Cómo podemos resolver esta ecuación matricial utilizando el producto?

Para contestar a esta última pregunta debemos aplicar la inversa de la matriz A.

1.4 Inversa de una Matriz

Sea $A \in R^{nxn}$ y $B \in R^{nxn}$ (matrices cuadradas)

A tiene inversa si y solo si existe otra matriz B del mismo tamaño tal que

$$A.B = B.A = I_n$$

Si B existe, se denomina Inversa de *A* (a su vez A es la inversa de B)

Simbólicamente:

$$A \in R^{n\,x\,n} \text{ es Inversible } \Leftrightarrow \exists\, B \in R^{n\,x\,n} \,/\, A.B = B.A = I_n$$

Nota : A la inversa de *A*, también se la denota con : A^{-1}

Por lo que la definición queda: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Las matrices que tienen inversa se llaman **inversibles** o **no singulares**

Actividad 24:

Verificar que C es la inversa de A aplicando la definición.

A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & -4 \\ -1/2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Transformaciones u operaciones elementales en una matriz:

a) Cambiar el orden de las filas.
b) Multiplicar una fila por un escalar diferente de 0.
c) Sumar a alguna fila una combinación lineal de las demás.

Equivalencia de Matrices

Sean $A, B \in K^{m\,x\,n}$

Diremos que la matriz *B* es Equivalente a la matriz *A* si y solo si *B* puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre la matriz *A*.

Simbólicamente: $A \sim B$

Cálculo de la matriz inversa:

Método de Gauss

Dada una matriz $A \in \Re^{nxn}$, se parte de esta y se coloca a su derecha la identidad I_n : $(A \mid I_n)$

1- Se elige de A un elemento distinto de 0 como pivot de cualquier fila. (preferentemente 1).

2- Se copia la fila que pertenece el pivot y se convierten en 0 los elementos de esa columna.

3- A los restantes elementos (incluidos la identidad) se le realizan **operaciones elementales** por filas , hasta convertir en otra equivalente, sin cambiar el orden de las columnas.

4- Luego se elige otro pivot que tiene que ser de **otra fila** diferente del pivot anterior. Si el elemento seleccionado como pivot **es $\neq$1**, se lo convierte previamente multiplicando a toda la fila por su **inverso multiplicativo**. Los restantes elementos no se modifican en esta operación.

5- Luego se sigue la secuencia 2 y 3 dadas, hasta que no queden mas pivot que elegir y A se transforme, de ser posible, en la identidad I_n .

A su vez la matriz I_n se transforma en otra matriz que es precisamente la inversa de A, o sea A^{-1} .

En definitiva el proceso se resume en:

$$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

Nota: Si el proceso termina antes de poder elegir todos los pivot necesarios, entonces **A no tiene inversa.**

Actividad 25:

Aplicar el proceso de Gauss a la matriz C y probar que su inversa es A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 26:

Dadas las siguientes matrices obtener, si existe, la inversa aplicando el método de Gauss –Jordán

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Actividad 27:

Determine la matriz X que satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las Matrices Inversas.

Prop._01: *Unicidad de la Matriz Inversa*.
Si $B \in R^{nxn}$ y $C \in R^{nxn}$ son, ambas, inversas de la matriz $A \in R^{nxn}$, entonces $B = C$

Prop._02: *Inversa del Producto de Matrices.*
A y B son Inversibles $\Rightarrow$ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Prop._03: Si $A \in R^{nxn}$ es invertible, entonces A^T también es invertible. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Prop._04: La Inversa de la Inversa de una matriz es la misma matriz.
$\forall A \in R^{nxn} : (A^{-1})^{-1} = A$

Actividad 28:

Calcular la inversa de A^{-1} sabiendo que $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de la matriz

Es el número de vectores canónicos (filas o columnas) distintos que se encuentran en una matriz o en sus equivalentes, y lo denotaremos con $r(A)$ o $\rho(A)$.

Propiedad: Las matrices **equivalentes tienen igual rango**.

Los vectores canónicos no son otra cosa que los vectores columnas de la matriz identidad I_n , luego de la aplicación del método de Gauss-Jordan y ellos son:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ Ejemplos: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ *r(M)* = 3 y *r(C)*= 2

Actividad 29:

Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En resumen:

Espacios vectorial

Conjuntos		Operaciones
V y K	Axiomas	+ y ∘

$$(V, +, K , \circ)$$

A) **Axiomas de la +**:

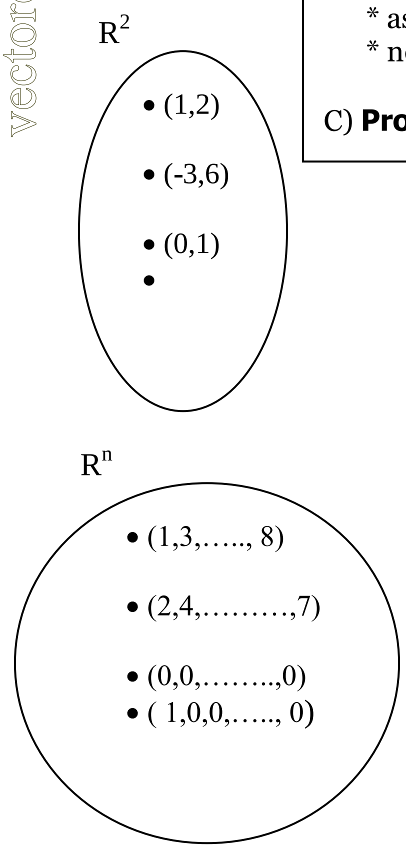
* Asociativa
* Conmutativa
* Elemento nulo
* Vector opuesto

B) **Axiomas del •**

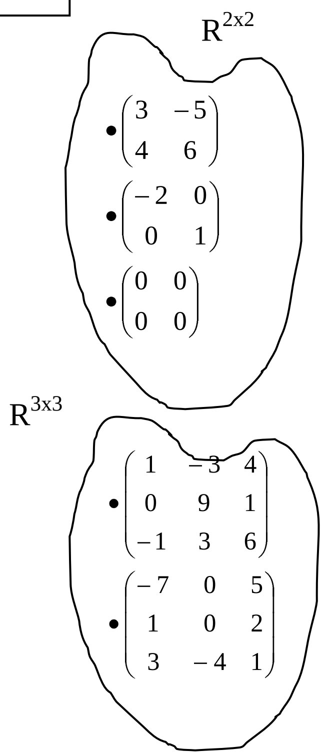
* Distributivas
* asociatividad mixta
* neutro del producto

C) **Propiedades**

Estructura algebraica de vectores



Estructura algebraica de matrices



1.5 Ejercicios con enunciado económico

30- Una empresa nacional tiene cuatro distribuidoras, una en cada región (norte, centro, sur y Cuyo). Las ventas de tres de sus productos por región, expresadas en millones de dólares, fueron:

Año 2004	Año 2005
Región 1, producto 1: 2.6	Región 1, producto 1: 3.6
Región 1, producto 2: 3.2	Región 1, producto 2: 4.5
Región 1, producto 3: 2.4	Región 1, producto 3: 2.9
Región 2, producto 1: 4.8	Región 2, producto 1: 2.5
Región 2, producto 2: 4.4	Región 2, producto 2: 5.0
Región 2, producto 3: 3.6	Región 2, producto 3: 3.0
Región 3, producto 1: 1.8	Región 3, producto 1: 3.0
Región 3, producto 2: 2.5	Región 3, producto 2: 3.5
Región 3, producto 3: 3.8	Región 3, producto 3: 4.6
Región 4, producto 1: 0.9	Región 4, producto 1: 2.5
Región 4, producto 2: 2.8	Región 4, producto 2: 3.8
Región 4, producto 3: 2.5	Región 4, producto 3: 4.0

I- Organizar los datos anteriores de modo que la información se presente en forma más clara.

II- Si llamamos A a la matriz de ventas del año 2004 y B a la del año 2005

a) Dar el significado de los elementos a_{23} y b_{21} .
b) Calcular las ventas totales de los dos años de cada producto y cada región.
c) Calcular e interpretar A - B
d) La gerencia de la empresa había proyectado para el año 2006 un 30 % de incremento en las ventas de los productos en todas las regiones respecto al año 2004. Calcular la diferencia entre los niveles de venta proyectados y los niveles de venta reales del año 2005.

31) *Bancos*

La matriz A los números de tres tipos de cuentas bancarias el primero de enero en el Banco Central y sus sucursales.

A =

	Cuentas de cheques	Cuentas de ahorro	Depósitos y plazos fijos
Oficina matriz	2820	1470	1120
Sucursal del Oeste	1030	520	480
Sucursal del Norte	1170	540	460

La matriz B representa los números y tipos de cuenta abiertas durante el primer trimestre y La matriz C se refiere a los números y tipos de cuentas cerradas durante el mismo período.

$$B = \begin{bmatrix} 260 & 120 & 110 \\ 140 & 60 & 50 \\ 120 & 70 & 50 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 100 & 80 & 90 \\ 70 & 30 & 40 \\ 60 & 20 & 40 \end{bmatrix}$$

a) *Encuentre la matriz D, la cual representa el número de cada tipo de cuenta al final del primer trimestre en cada lugar.*

b) *Debido a la apertura de una empresa cercana se prevee un incremento en un 10% en la cantidad de cuentas en cada lugar durante el segundo trimestre. Escriba una matriz E que refleje este incremento previsto.*

32) (*Costos de transporte*)

Una compañía tiene plantas en tres paises: Argentina Brasil y Chile, y cuatro centros de distribución en los lugares D, E, F y G.
El costo (en dolares) de transportar cada unidad de su producto de una planta A un centro de distribución está dado por la matriz siguiente:

	A	B	C
D	12	16	18
E	10	8	14
F	15	12	6
G	16	8	15

a) Si los costos de transporte se incrementan uniformemente en $2 por unidad.
¿Cuál es la nueva matriz?

b) Si los costos de transportación se elevan en un 20 % , escriba los nuevos Costos en forma matricial.

33) *Un comerciante tiene en su depósito para vender en el mes del mundial, diez televisores LCD de 42", doce de 32", quince de 22" y diez de 19". Los televisores de 42" se venden a $ 3800 cada uno, los de 32" a $ 3200, los de 22" , a $ 2500 y los de 19" a $ 2000.*

a) Exprese los vectores de stock y de precios.

b) Realice una valoración del inventario mediante el producto de esos vectores.

34) *Un empresario del espectáculo planea construir un cine, sala de fiestas y pabellón de deportes en tres localidades L1, L2, L3. Según un muestreo previo, las preferencias de dichos ciudadanos (en tanto por ciento) se plasman en la siguiente matriz:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Cine} & \text{fiestas} & \text{deportes} \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 20 & 40 & 40 \\ 15 & 35 & 50 \\ 18 & 42 & 40 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si el total de habitantes, mayores de 16 años, de las ciudades citadas vienen dado por la matriz fila:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L1 & L2 & L3 \end{array} \\ \text{Habitantes} & \begin{pmatrix} 72\,000 & 14\,500 & 39\,200 \end{pmatrix} \end{array}$$

Investiga que tipo de espectáculo tendrá mayor número clientes.

35) *Una cadena de supermercados retribuye a sus empleados más eficientes mediante una paga extraordinaria anual si sobrepasan cierto nivel de resultados, y además les obsequia con bonos de compra en sus establecimientos por valor de 150 euros.*

El año pasado tres empleados de administración obtuvieron 250 euros en plata y 3 en bonos, 5 empleados de tiendas recibieron 300 euros y 4 bonos, y 2 personas del equipo directivo recibieron 600 euros y 8 bonos.
Calcúlese el total de retribuciones efectuadas utilizando matrices, e interprete el resultado.

36) *En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y lapiceras, agrupándolos en tres tipos de lotes:*

- Lote A: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 lapicera.
- Lote B: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 lapiceras.
- Lote C: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 lapiceras.

Cada carpeta cuesta $ 20 , cada cuaderno $ 12 y cada lapicera $ 1,5.

i) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

ii) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A, B* y *C.*

37) *En un curso de postgrado hay alumnos de tres provincias: Santiago, Tucumán y Catamarca, distribuidos por comisiones I, II, III y IV , según la matriz de la izquierda:*

	I	II	III	IV
S	20	16	14	18
T	10	8	10	12
C	15	12	8	10

	S	T	C
a	100	160	120
b	120	180	140

La administración del curso ha elaborado dos posibles formas de pago a y b (en pesos) de acuerdo a la procedencia de cada alumno según se muestra en la matriz derecha.

Expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por comisión para cada plan propuesto.

38) *En tres hipermercados diferentes, el precio del litro de aceite de oliva y el de aceite de girasol es:*

Hiperm.	Precio del aceite de oliva	Precio del aceite de girasol
Alfa	4,20	3,10
Beta	4,50	3,00
gamma	3,80	3,40

La familia Diaz compra cada mes 3 litros de aceite de oliva y 1 litro de aceite de girasol.
La familia Perez adquiere 2 litros de aceite de oliva y 2 litros de aceite de girasol al mes.

Calcúlese, utilizando matrices, el gasto total en aceite realizado mensualmente por cada familia según el hipermercado que compre.

Una fábrica de bolígrafos (P1) , encendedores (P2) y llaveros (P3) requiere para su elaboración tinta (M1), gas (M2), metacrilato (M3) y aleación metálica (M4). Dos distribuidores (D1 y D2) se encargan de distribuir a los establecimientos comerciales los mencionados productos. Sea pues:

Anexo de teoría

Espacio vectorial de Matrices:

La suma de matrices es una **Ley de Composición Interna** en R^{mxn}

Simbólicamente: $+ : R^{m\,x\,n} \; x \; R^{m\,x\,n} \to R^{m\,x\,n}$

$(A\,,B\,) \to +(A,B) = A+B$

con $A+B=C \Leftrightarrow \forall\, i,j \;: a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

El producto de un escalar por una matriz es una **Ley de Composición Externa** en R^{mxn} con operador α **.**

$\bullet \;:\; R \times R^{m\,x\,n} \to R^{m\,x\,n}$

$(\alpha\,,A\,) \to \cdot(\alpha, A) = \alpha.A$

Simbólicamente: $\alpha.A = B \Leftrightarrow \forall\, i,j \;: \alpha.a_{ij} = b_{ij}$

Propiedades de la Suma de Matrices **.**

S1: La Suma de matrices es Asociativa.

$$\forall A,B,C \in K^{mxn} : (A+B)+C = A+(B+C)$$
$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

S2: Existe Neutro respecto de la Suma de matrices. Es la matriz nula

$$\exists\; 0_{mxn} \in R^{mxn} / \forall A \in R^{mxn}: \; A+0_{mxn} = 0_{mxn} + A = A$$
$$a_{ij}+0_{ij} = 0_{ij}+a_{ij} = a_{ij}$$

S3: Existe Inverso aditivo para cada matriz respecto de la suma de matrices

$$\forall A \in R^{mxn}, \exists\; -A \in R^{mxn} / : \; A+(-A) = (-A)+A = 0_{mxn}$$
$$a_{ij} + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + a_{ij} = 0$$

S4: La suma de matrices es Conmutativa

$$\forall A,B \in R^{mxn} \;:\; A+B = B+A$$
$$(a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij})$$

Propiedades del Producto por Escalar.

Pr1: El Producto de un Escalar por una Matriz es Asociativa Mixta.

$$\forall A \in R^{mxn}, \forall \alpha,\beta \in R : (\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$$
$$(\alpha.\beta).a_{ij} = \alpha.(\beta.a_{ij})$$

Pr2: Distributividad del producto en $R^{m\,xn}$ respecto de la suma en R.

$$\forall A \in R^{mxn}, \forall \alpha,\beta \in R : (\alpha+\beta).A = \alpha.A+\beta.A$$
$$(\alpha+\beta).a_{ij} = \alpha.a_{ij} + \beta.a_{ij}$$

Pr3: Distributividad del producto en R respecto de la suma en R^{mxn}.

$$\forall \alpha \in R \wedge \forall A,B \in R^{mxn} : \alpha.(A+B) = \alpha.A+\alpha.B$$
$$\alpha.(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha.a_{ij} + \alpha.b_{ij}$$

Traza de una Matriz.

La Traza de una matriz cuadrada es **la suma de los elementos** de la diagonal principal.

Si $A \in R^{n\,x\,n} \Rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots + a_{nn}$

Vectores y Matrices - Para Ejercitarse

1) Analiza si los vectores de (R4, +, .) : (6, 3, -3, 9), (0, 4, 2, 8), (3, 1, 0,-2), (5, 4, 0, 5) Son linealmente independientes.

2) Se sabe que los vectores de (R^3, +, .): (2, 1, -3), (1, 3, 2), (5, x, -4) son linealmente dependientes. Halla el valor de x.

3) determinar si $v_1 - v_2$ es combinación lineal de $u_1 - u_2$

$v_1 = (-1,0,1,-1)$ $v_2 = (1,1,1,1)$ $u_1 = (-1,2,1,3)$ $u_2 = (3,4,1,7)$

4) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$u_1 = (2, 1, 3, 4)$; $u_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $u_3 = (1, 3, 4, 1)$

5) Escribir las matrices definidas por las siguientes expresiones:

$A \in R^{2x3}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 3i - 2j$

$B \in R^{2x3}$, $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = -i + j^2$

$C \in R^{3x2}$, $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \begin{cases} -2j & si \quad i > j \\ i - j & si \quad i \leq j \end{cases}$

6) Calcular el valor de *k* y *p* para que las matrices E y F resulten iguales:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4-k \\ p-7 & p+k \end{pmatrix} \quad y \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2+k \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

7) Hallar una matriz M, tal que: $- A + B - M = 0_{3x2}$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -30 & -20 \\ 10 & 50 \\ -40 & 30 \end{pmatrix}$$

8) Determinar X, tal que: 1/4 X - B = A , con :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Dados X, Y matrices, resuelve:

$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

10) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Efectuar: B. A y luego A. C

ii) Probar que el producto B.A.C es asociativo.

11) Probar la propiedad asociativa del producto con A, B y C :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -8 & 2\end{pmatrix}$$

12) Calcular $C^t \cdot B^t \cdot A^t$ con las matrices del ejercicio anterior:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -8 & 2\end{pmatrix}$$

13) Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal.
¿Es conmutativo este producto?

14) ¿Se puede multiplicar las matrices dadas?¿Qué resultado se obtiene?

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ -4 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

15) Si $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que: $(A - I)^2 = 0$

16) ¿Se verifica que I.A = A ?, siendo:

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

17) Dadas las matrices A y B :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

i) Compruebe que $A:B = 0_{3x3}$, y que no necesariamente $A = 0_{3x3}$ o $B = 0_{3x3}$
ii) $B.A = 0_{3x3}$?

18) Halle todas las matrices A de tres columnas que verifiquen: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.A = A$

19) Reducir la matriz A mediante operaciones elementales a
a) La matriz equivalente B
b) Una matriz triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

20) Verificar que la matriz A es igual a su inversa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

21) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Verificar que A es la inversa de B aplicando la definición.
ii) Aplicar el proceso de Gauss a la matriz B para obtener A.

22) Realiza las operaciones indicadas con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) $(A+B)^2$ b) $A^2 + 2\,A.B + B^2$ c) $A.B^{-1}$ d) $(A+B^{-1}).A^{-1}$

Compara los resultados de a con b

23) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,31 \\ 0,04 & 0,18 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 50 & 8 & 0 \\ 20 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$

a) Calcular la traza de cada una.

b) Calcular la traza de C^t ¿Qué ocurre?

24) Verifique que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

25)

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación: $XAB - XC = 2C$

26) Calcular el rango de las siguientes matrices aplicando operaciones elementales de fila. Para las matrices cuadradas cuyo rango sea igual a su orden, encuentre las respectivas inversas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

27) Si el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ = 2, ¿Puede ser el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e+b & f+c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ = 2 ?

Ejercicios con enunciados económicos:

28- Una empresa fabrica 3 tipos de artículos R, S y T . Los precios de coste y los de venta por Unidad , y el número de unidades vendidas de cada artículo quedan reflejadas en esta tabla:

	Precio de coste	Precio de venta	Unidades vendidas anualmente
R	6	18	2240
S	9'2	28	1625
T	14'3	40	842

Sabemos que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de venta , V, es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V .

b) Obtén, a partir de los anteriores, la matriz de ingresos anuales, A, correspondiente a los tres Artículos, la matriz de gastos anuales, G, y la de beneficios anuales, B.

29) Ramiro y Daniel tienen acciones de la bolsa dadas por la matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ Ramiro \\ Daniel \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} NEC & YPF & Movi & MP \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 300 & 260 & 50 \\ 100 & 200 & 400 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} NEC \\ YPF \\ Movi \\ MP \end{array} \begin{bmatrix} 54 \\ 48 \\ 98 \\ 82 \end{bmatrix}$$

Al cierre de las operaciones en cierto día, los precios de las acciones están dados por B. Calcule A.B y explique el significado de la matriz producto.

30) En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

MATERIAL \ PRODUCTO	*A*	*B*	*C*
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.

31) Una Fábrica textil de buzos para alumnos de la secundaria recibió encargos para la confección de un modelo A de buzos para un colegio I , otro modelo B de buzos para un colegio II y un modelo C para un colegio III. Siendo los pedidos de 35, 32 y 40 unidades para cada colegio respectivamente.
En la matriz siguiente están representados los insumos necesarios para cada artículo.

	Telas [m]	Cierres [u]	Hilo [u]	Tiempo de confección En forma manual[Hs]
Modelo A	2,5	1	3	4
Modelo B	4	3	5	6
Modelo C	5	1	4	5

a) ¿Que cantidades de cada tipo de insumo deben emplear la casa para realizar los distintos pedidos?

b) Si el metro de tela cuesta $ 20 , el cierre $ 4 , la hora trabajada $ 10 y el hilo $ 1. ¿Cuál es el costo de cada confección?

c) Si otra fábrica requiere de los mismos insumos pero tiene una maquina que tarda en confeccionar la mitad del tiempo estipulado en la primera ¿Aumentará el costo de los buzos?

d) Calcule el costo total de los encargos en cada uno.

32) La matriz A = $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$ representa las necesidades técnicas por unidad de producto para la producción de los artículos α y β .
La primera fila se refiere a las necesidades de mano de obra (número de horas que ha de trabajar un hombre por unidad de producto), y la segunda fila expresa el tiempo que debe funcionar la máquina por unidad de producto.
La primera columna indica las necesidades del producto α y la segunda columna nos dice que requiere β . El próximo mes se pretende fabricar 40 unidades de α y 25 de β .

Calcúlese, matricialmente , cuántas horas - hombres es necesario contratar y cuánto tiempo deberá estar funcionando la máquina.

33) La matriz A da el porcentaje de votantes elegibles en la Ciudad de San Lorenzo, clasificados según su afiliación partidista y grupo de edad.

$$A = \begin{array}{r} \\ \textit{menor de } 30 \textit{ años} \\ 30 \ a \ 50 \\ \textit{mayor de } 50 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{Radical} & \textit{F.Victoria} & \textit{izquierda} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0{,}10 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{menor de } 30 & 30 \ a \ 50 & \textit{mayor de } 50 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30.000 & 40.000 & 20.000 \end{pmatrix} \end{array}$$

La población de votantes elegibles en la Ciudad por grupo de edad está dada por la matriz B. Halle una matriz que proporcione el número total de votantes elegibles en la Ciudad que votarán por los diferentes candidatos propuestos.

34) Una cadena de supermercados retribuye a sus empleados mas eficientes mediante una paga extraordinaria anual si sobrepasan cierto nivel de resultados, y además les obsequia bonos con compra en sus establecimientos por valor de $ 350.
El año pasado 3 empleados de administración obtuvieron 450 euros en metálicos y 3 bonos
5 empleados de las tiendas recibieron 600 pesos y 4 bonos , y 2 personas del equipo directivo recibieron 900 pesos y 8 bonos.

Calcúlese el total de las retribuciones efectuadas utilizando matrices, e interprete el resultado.

35) *Un estudiante gana $ 15 por hora impartiendo clases particulares , $6 por hora pasando trabajos en computadora y $2,50 por hora trabajando en un Ciber.*

El número de horas que ha trabajado durante los últimos meses en cada actividad está dada por la matriz:

	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Clases particulares	20	15	40	5
Trabajos con computadora	15	10	12	0
Ciber	30	20	16	10

Calcúlese la matriz de precios totales e interprete estas matrices.

36) Supóngase que a un contratista le fue adjudicada por licitación la construcción de 24 unidades edilicias que según el destino están distribuidas en la tabla I.

Las cantidades de materiales y de mano de obra para cada tipo de edificación están contempladas en la tabla II.

La tabla III nos brinda información acerca de los costos unitarios de materiales y mano de obra.

TABLA I

Local	Dúplex	Planta
5	7	12

TABLA III [en $]

Mampostería	70
Hormigón	120
Revestimientos	10
Carpintería	50
Instalaciones	4000
Mano de obra	3

TABLA II

	Mampostería [m^3]	Hormigón [m^3]	Revestimientos [m^2]	Carpintería [global]	Instalaciones [global]	Mano de Obra [Hs]
Local Comer.	25	15	400	40	0,5	6000
Dúplex	35	30	750	20	1,0	8000
Planta Unica	40	20	800	18	0,8	7000

Se requiere conocer:

a) Demanda total de materiales y mano de obra para construir las 24 unidades funcionales
b) El costo total para cada tipo de edificación.
c) El costo total de la obra.

37) En un taller de tapicería se quieren tapizar sillas y sofás. Cada silla requiere 1 hora de mano de obra para cortar las telas y 4 horas para cocer y pegar. Cada sofá necesita 2,5 horas para cortar y 8 horas para cocer y pegar. Si se dispone diariamente de 16 horas para cortar y 56 horas para coser y pegar, ¿Cuántas sillas y sofás se pueden tapizar al día si se utilizan todas las horas disponibles ?

38) (*Sistema de precios*)
Una empresa produce lavarropas, licuadoras y ventiladores en serie. Dispone de $ 150.000 para la compra de motores , $ 120.000 destinados a armazones y $ 100.000 para microchips. ¿Qué precios unitarios debe pagar por los motores, los armazones y los microchips si la matriz de requerimientos de insumos es A

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 \\ 30 & 40 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: llame con P a la matriz precio y con X a la matriz de precios unit.)

Cuestiones tipo test

1- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Todo matriz diagonal es escalar
b) Toda matriz triangular es diagonal
c) Toda matriz escalar es triangular
d) Toda matriz identidad es diagonal pero no escalar.

2- Sean A, B, C matrices cuadradas del mismo orden, con A inversible, tales que: AC+B =A. Entonces es falso que se verifique:

a) AC = A – B
b) C = (A – B).A^{-1}
c) B = A.(I – C)
d) B + A.(C – I) = 0

3- ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Existen matrices cuadradas A y B del mismo orden tales que existe $(AB)^{-1}$ pero no B^{-1}
b) Existen matrices A, B y C tales que AB = AC pero B ≠ C.
c) Existen matrices A y B con D(A) = 0 verificando AB = I
d) Existen matrices A, B y C con D(A) ≠ 0 tales que AB = AC pero B ≠ C.

4- Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. A simétrica y B antisimétrica. Entonces:

a) AB es simétrica
b) AB es antisimétrica.
c) AB = BA
d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5- Sea una matriz cuadrada de orden 3 y de rango 2. Si le añadimos una fila, el rango de la nueva matriz:

a) Sigue siendo 2
b) Pasa a ser 3
c) Puede ser 2 o 3
d) Puede ser 3 o 4

6- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, se verifica:

a) A es inversible si y solo si a = -1
b) A es simétrica si y solo si a = -1
c) Rg(A) = 2 si y solo si a = 1
d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

7- Sean A y B dos matrices tales que AB = 0_{nxn} y B inversible. Entonces:

a) A = 0_{nxn}
b) B = 0_{nxn}
c) A ≠ 0_{nxn}
d) No se sabe

8- Si A.X .B = C , con A y B inversibles, entonces:

a) X = A^{-1} .B^{-1} .C
b) X = C . B^{-1} .A^{-1}
c) X = B^{-1} . C . A^{-1}
d) X = A^{-1} .C .B^{-1}