Guía de trabajos Teóricos- Prácticos Nº 4

Introducción:

Esta Unidad consta de las siguientes partes:

a) Determinantes

b) Sistema de Ecuaciones

, donde una complementa la otra para resolver un problema

Problema I:
En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr., 500 gr. Y 1 kg.
Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr.) que de tamaño mediano (500 gr.). Sabiendo que el precio del kg. de bombones es $ 200.
y que el importe total de los bombones envasados asciende a $ 6.250 .

a) Plantear un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo.

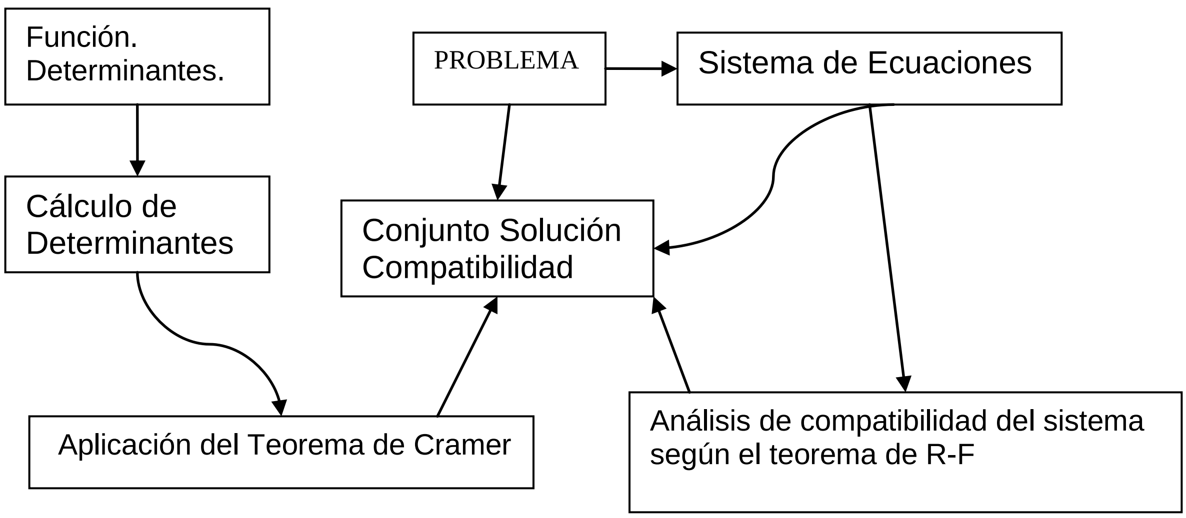
b) Resolver el problema.

Respuesta: i) El sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z = 60 \\ x = y+5 \\ 50x+100y+200z = 6.250 \end{cases} \quad \text{o en forma equivalente} \quad \begin{cases} x+y+z = 60 \\ x-y = 5 \\ x+2y+4z = 125 \end{cases}$$

A partir de este sistema se puede resolver de diferentes formas, previo análisis de la misma.

ii) Nosotros utilizaremos dos caminos para analizar y/o resolver un sistema lineal, cada una apoyada en un marco teórico. El siguiente esquema muestra estas relaciones:



Parte A: Determinantes:

Antes de dar solución al problema dado al principio, te propongo otro problema más sencillo para resolver por el método de determinantes.

Problema II:

La ecuación de demanda de cierto producto es ***p*** + 2***x*** = 25 *y la ecuación de oferta es* ***p*** - 3***x*** = 5 *, en donde* ***p*** *es el precio y* ***x*** *la cantidad demandada o suministrada, según sea el caso. Calcular los valores de* ***x*** *y de* ***p*** *en el punto de equilibrio de mercado.*

Planteo: El sistema lineal asociado resulta obviamente:

$$\begin{cases} p+2x=25 \\ p-3x=5 \end{cases}$$,sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que lo podemos expresar:

$$\begin{pmatrix} p+2x \\ p-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$ o de otra forma $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$ llamada forma matricial con

matriz de coeficientes A

Matriz incógnita

matriz de los términos independientes

Recordemos el método de determinantes, completando:

D(A)= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ =………………………….. donde D(A) significa "*el determinante de A"*

Por lo tanto: p = $\dfrac{\begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}{D(A)} = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$ y x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{D(A)} = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$

Esta claro que si el número D(A) hubiese salido nulo este método no se podría aplicar

¿Por qué?......................

Además :

En un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas se puede aplicar el método?............................

¿Qué es un determinante?

Existirá un soft matemático para resolver Determinantes ?

¿Se puede obtener un determinante de 3 x 3?

Todas estas preguntas se pueden responder a partir de la definición de la función determinante. cuya noción es fundamental en el *Algebra lineal.*

Función Determinante de Orden n

Sea una matriz $A \in R^{nxn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que la expresaremos como: $A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n) \quad con\, 1 \le j \le n$

donde A_j denota la columna de lugar *j* de la matriz cuadrada *A*.

Definición*:*

Determinante de orden *n* es toda función:

$$D : R^{n \times n} \to R$$
$$A \to D(A) = |A|$$

Que verifica los siguientes axiomas:

Ax_01: $D(A_1, A_2, \dots\dots, A_i + A_j, \dots\dots, A_n) = D(A_1, A_2, \dots\dots, A_i, \dots\dots, A_n) + D(A_1, A_2, \dots\dots, A_j, \dots\dots, A_n)$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

Ax_02: $D(A_1, A_2, \dots\dots, \alpha.A_i, \dots\dots, A_n) = \alpha.D(A_1, A_2, \dots\dots, A_i, \dots\dots, A_n)$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

Ax_03: *Si* $A_i = A_j \; con \; i \neq j \Rightarrow D(A_1, A_2, \dots\dots, A_i, \dots, A_j, \dots\dots, A_n) = 0$

Ax_04: $D(I_n) = 1$

$$\forall i, j \quad con \quad 1 \le i \le n \quad \wedge \quad 1 \le j \le n \wedge \alpha \in R$$

Nota:

- Los axiomas 1 y 2 caracterizan a la función determinante *D* como una función lineal respecto de cada columna de la matriz *A*.
- El axioma 3 establece que si dos columnas consecutivas son iguales entonces el determinante es nulo.
- El axioma 4 establece que el determinante de la matriz Identidad de orden n, vale 1.

Determinante de orden 2:

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2, definimos: $D(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

Actividad 1: Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 40 \\ 3 & -24 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 100 & -40 \\ 300 & 24 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$

Actividad 2: Dadas las matrices columna:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aplicar propiedades al determinante: D($A_1 \;\; A_2 + A_1 \;\; 0{,}5\, A_3$)

Actividad 3: Aplica axiomas de determinantes. Si es posible resuélvelo:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1000 & 400 \\ 3000 & -240 \end{vmatrix} =$

c) $0{,}01 . \begin{vmatrix} 100 & 4 \\ 300 & -2 \end{vmatrix} + 2 . \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

Actividad 4:

Colocar V (Verdadero) o F (Falso). Justifica aplicando definición y axiomas:

a) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1000 & 6 \\ 3000 & -3 \end{vmatrix} = 3000 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \, . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10^3 \, . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1000$

Algunos determinantes de orden mayor que 2, son fáciles de obtener directamente como por ejemplo:

1) $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -7 & 56 & 0 \\ 23 & -50 & 0 \end{vmatrix} =$

3) $\begin{vmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Si se conocen ciertas propiedades que ayuden a calcularlos directamente

Propiedades de la Función Determinante. *Sea A una matriz cuadrada cualquiera.*

Prop._01: Si se permutan dos columnas de una matriz A, entonces los correspondientes determinantes son opuestos.

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -D(A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$$

Prop._02: Si una columna de una matriz A es el vector nulo entonces su determinante es nulo.

$$D(A) = D(A_1, A_2, \ldots, O_V, \ldots A_n) = 0$$

Prop._03: El determinante de una matriz no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de otras.

$$\forall i \neq j: \; D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j + \alpha . A_i, \ldots, A_n)$$

Prop._04: El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

$$D(A^T) = D(A)$$

Prop._05: El determinante de una matriz triangular inferior (o superior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal .

Prop._06: Si una columna (o fila) es una combinación lineal de otras, su determinante es 0.

Prop. 07 : El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de dichas Matrices cuadradas.

$$D(A.B) = D(A).D(B)$$

Actividad 5:

Aplicando las propiedades y/o axiomas dados, calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -40 & 100 \\ 0 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ -2 & 9 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 \\ -2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Actividad 6: Demostrar las propiedades I, II y III de las propiedades de determinantes

Pero claro no siempre es conveniente aplicar propiedades. En general, existen formas definidas

Desarrollo del Determinante de una Matriz por medio de los Cofactores de los Elementos de una fila o columna.

Definiciones previas: Sea $A \in R^{nxn}$

Menor complementario: de un elemento a_{ij} de una matriz A de orden n, es el determinante de la submatriz de orden (n-1)x(n-1) que queda después de suprimir la i-ésima fila y la j-esima columna de A.

Lo denotamos con M_{ij}. O sea: $M_{ij} = |A_{i/j}|$ Ej.: De -3 en $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es $M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$

En general para un elemento a_{ij}

$$\begin{array}{cc} & \text{Columna j} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

fila i

Cofactor de un elemento : a_{ij} de una matriz A , es el número:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij} = (-1)^{i+j} . |A_{i/j}|}$$

Actividad 7:

Obtener i) el menor complementario M_{32} ii) los cofactores A_{12} , A_{23} y A_{31}

Siendo $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Desarrollo del Determinante - Regla de Laplace.

El determinante de una matriz $A \in R^{nxn}$ con *n >2* , es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus cofactores respectivos.

Desarrollo por Cofactores a lo largo de la *i* – ésima fila.

$$D(A) = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots\ldots + a_{in}.A_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}$$

<u>Actividad 8:</u> Calcular el determinante de las matrices dadas, aplicando el desarrollo por fila o columna (regla de Laplace).

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Actividad 9:</u> Obtener el determinante de cada uno, reduciendo a otro determinante de orden 2x2 :

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Actividad 10:</u>

Calcular el / los valor/es de k , en cada caso ,que verifique las siguientes expresiones:

a) $\begin{vmatrix} k & -k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$

b) $\begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 2$

<u>Actividad 11:</u>

Se sabe que el determinante de P es 3 ¿Cuál es su inversa?

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Adjunta de una Matriz.

Si $A \in R^{nxn}$ y A_{ij} es el Cofactor del elemento a_{ij} , entonces la matriz :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ se denomina Matriz de Cofactores de *A* y la denotamos con A^c

Definición: La Adjunta de *A* es la transpuesta de la matriz de cofactores y se denota por *Adj (A)*

Adj (A) = $(A^c)^t$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

Propiedad: La suma de los productos de una fila por los cofactores de otra es nulo.

Teorema.

Sea $A \in R^{n \times n}$, $Adj(A) \in R^{nxn}$ e $I \in R^{nxn}$

El producto de la matriz *A* por su Adjunta tanto por derecha como por izquierda da como resultado el determinante de la matriz *A* por la matriz identidad.

Simbólicamente: $A.Adj(A) = Adj(A).A = D(A).I_n$

Matriz inversa o No singular.

Sea $A \in R^{nxn}$ diremos que : A es inversa (no singular) $\Leftrightarrow \exists$ B$\in R^{nxn}$ / A.B = B.A = I_n

(la Inversa de *A* se la denota con A^{-1}).

Propiedad: La matriz inversa en caso de existir es **única**

Teorema. Condición Necesaria y Suficiente para que una Matriz sea Inversible.

Una matriz cuadrada es Inversible si y solo si su determinante es no nulo.

O sea: ***A es inversible $\Leftrightarrow$ D(A) $\neq$ 0***

Cálculo de la inversa mediante su adjunta: $A^{-1} = \frac{1}{D(A)}.adj(A)$

Actividad 12:

Demostrar el teorema de la inversa de una matriz cuadrada y probar que la fórmula:

$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}.adj(A)$ es otra manera de obtener la inversa de una matriz cuadrada.

Volvemos a nuestro sistema lineal dado al principio de esta guía:

$$\begin{cases} 10x+12y+15z & = & 116 \\ x+\ \ y+\ \ z & = & 9 \\ y-z & = & -1 \end{cases}$$

Ya estamos en condiciones de resolverlo aplicando determinantes y producto de matrices.

(pero no por Teorema de Cramer, pues eso se desarrollará mas adelante).

Actividad 13:

a) Expresa el sistema lineal dado en el problema en forma matricial: A. X = B

b) Analiza la existencia o no de A^{-1} mediante el cálculo del D(A)

c) En el caso posible, resuelve el sistema dado A.X = B haciendo $X = A^{-1} . B$

Actividad 14:

Dada la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Obtener su adjunta

b) Verificar que: Adj (B) . B = B. Adj(B) = D(B) . I

Actividad 15:

Analizar si las matrices siguientes son inversibles (no singulares); y en tal caso encuentre su inversa mediante sus respectivas adjuntas.

(aplique el desarrollo por línea para el cálculo de los determinantes)

a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b)$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Sistema de Ecuaciones Lineales.

Uno de los problemas fundamentales del Algebra Lineal es la resolución simultánea de ecuaciones lineales, siendo el caso más simple aquel en el que el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones. Para este caso una alternativa es la aplicación del T. de Cramer, aunque esta limitado al cálculo de determinantes, en los casos posibles. En general existen otros métodos para analizar y resolver un sistema lineal cualquiera.

Se denomina **Sistema de *m-ecuaciones*** con ***n-i**ncógnitas* a un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables: $x_1, x_2, \dots, x_n$, y escalares a_{ij} y b del cuerpo de los números Reales, que se expresa:

(1)
$$\begin{cases} a_{1\,1}.x_1 + a_{1\,2}.x_2 + \dots\dots + a_{1\,n}.x_n = b_1 \\ a_{2\,1}.x_1 + a_{2\,2}.x_2 + \dots\dots + a_{2\,n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m\,1}.x_1 + a_{m\,2}.x_2 + \dots\dots + a_{m\,n}.x_n = b_n \end{cases} \qquad a_{i\,j}\ con\ 1 \le i \le m\ ,\ 1 \le j \le n \quad x_i\ \ con\ 1 \le i \le n$$

<u>Forma Matricial</u> de un Sistema de *m-ecuaciones* lineales con *n-incógnitas*.

Se denomina a la expresión *A.X = B* con $A \in R^{m\,x\,n}$, $X \in R^{n\,x1}$, $B \in R^{n\,x1}$

Es decir:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{Matriz\ \ de\ \ Coeficientes}, \quad X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{Vector\ de\ las\ Incógnitas}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{Vector\ de\ los\ Términos\ \ Independientes}$$

Efectuando el producto de matrices y aplicando la definición de igualdad de matrices, se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}$$

Ejemplo: del problema 1 de Determinantes:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 60 \\ x - y & = & 5 \\ x + 2y + 4z & = & 125 \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Conjunto Solución:

Solución de un sistema lineal A.X = B , (si es que existe) es una matriz $\overline{X}$ que verifica la ecuación $A.\overline{X} = B$ donde: $A \in R^{mxn}$, $X \in R^{nx1}$, $B \in R^{nx1}$.

Sea S el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema lineal. O sea

$$S = \{ \overline{X} \in R^{nx1} \ / \ A.\overline{X} = B \}$$

Clasificación de un sistema de Ecuaciones lineales:

Dado un sistema lineal A.X = B

De acuerdo a la existencia o no del conjunto S, se presentan los siguientes casos

_ Si S = ∅ ; =) Sistema Incompatible

_ Si S ≠ ∅ ; =) Sistema Compatible

− S tiene única solución =) Compatible **determinado**

− S no tiene única solución =) Compatible **indeterminado**

Teorema.

Si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes entonces tiene exactamente el mismo conjunto solución.

Por ejemplo: los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 2 \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 0 \\ 5x_2 + x_3 &=& -4 \\ -x_3 &=& -2 \end{array}\right.$$

Son equivalentes, pues tiene como solución a: $\begin{pmatrix} -4/5 \\ -6/5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Transformaciones elementales para obtener un sistema equivalente a uno dado:

Para obtener un sistema equivalente al dado valen las siguientes operaciones elementales:

* Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema y de las incognitas
* Multiplicar los dos miembros de una ecuación cualquiera por un nº distinto de 0
* Suprimir una ecuación del sistema por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un nº cualquiera distinto de 0.

Actividad 16:

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$a)\quad \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ x + 4y = 5 \end{array}\right.$

$b)\quad \left\{\begin{array}{l} -2w = 4 - 3z \\ z = 6w - 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 5y + z &=& 0 \\ x + y &=& 3z \\ -y + 2z &=& x \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} x - 4y + z &=& -2x + y \\ x + y - z &=& 2z \\ z &=& \dfrac{x+y}{2} \end{array}\right.$

i) Expresarlos en forma matricial

ii) Indica que sistemas son equivalentes

Sistemas Lineales Homogéneos.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si todos los términos independientes son nulos.

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots + a_{1\,n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots + a_{2\,n}.x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \ldots + a_{m\,n}.x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales **homogéneo es siempre Compatible**,

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \end{cases}$$

Pues **una** solución obvia es : $x = y = z = t = 0$, esta solución se denomina **Solución Trivial**.

En el caso que haya **otras** soluciones se denominan ***Solución No Trivial*.**

Podemos por tanto clasificar a los sistemas homogéneos como compatibles:

• determinados : aquellos que sólo admiten la solución trivial.

• indeterminados: aquellos que admiten infinitas soluciones.

Actividad 17:

Determina cual de los siguientes sistemas es determinado o indeterminado:

a) $\begin{cases} x + y - 5 = -5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4y = -2x \\ x = -2y \end{cases}$

Problema:

El dueño de un bar ha comprado gaseosas, cerveza y vino por importe de $2600 (sin impuestos). El valor del vino es $ 312 menos que el de las gaseosas y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que las gaseosas deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de $3098, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

Importante: Para resolver problemas hay que tener presentes las etapas en el proceso:

1. *Leer el problema*
2. *Definir las incógnitas principales de forma precisa*
3. *Traducción matemática del problema*
4. *Resolución del problema matemático*
5. *Interpretar las soluciones*
6. *Contrastar la adecuación de esas soluciones*

Actividad 18:

Definir las incógnitas del problema dado. Plantearlo mediante un sistema lineal y analizar el determinante de la matriz de coeficientes.

El método de resolución que se conoce como determinantes esta basado en el siguiente teorema:

***Teorema de Cramer**.*

Si $A \in R^{mxn}$ es no singular y $B \in R^{nx1}$, entonces el sistema lineal *A.X=B* admite solución única y el valor de cada variable es el cociente entre el determinante que se obtiene al sustituir en el determinante del sistema, la columna de coeficientes de la variable por la columna de los términos independientes y el determinante del sistema.(Regla de Cramer)

Actividad 19: Demostrar el teorema de Cramer

Actividad 20:

Verificar si los siguientes sistemas son Cramerianos. En caso afirmativo obtener la solución aplicando Regla de Cramer

$a)\quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

$b)\quad \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x + 8y + z = 3 \end{cases}$

$c)\quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 4 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$

Actividad 21:

Resuelva el sistema homogéneo cuya matriz de coeficiente es: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Problema:

Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo.

Cada volumen de trigo se vende por 4 €, el de la cebada por 2 € y el de mijo por 0.5 €.

Si se vende 100 volúmenes en total y si obtiene por la venta 100 €, ¿cuántos volúmenes de cada especie se venden?

Si se plantea el sistema se puede observar que el teorema de Cramer no es aplicable en este caso. ¿Porqué?

Antes de seguir con la resolución del problema, veamos los siguientes:

Matriz Ampliada **o** ***Aumentada*** : la notamos con : A^0 , A^a.

Para hacer más operativa la notación a la hora de resolver sistemas lineales, podemos prescindir de la matriz columna de las variables del sistema y en su lugar representar el sistema mediante una única matriz ampliada, (A | B), que consiste en añadir a la matriz A una última columna correspondiente a la matriz B de los términos independientes.

$$A^a = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}, \quad A^a \in R^{m\,x\,(n+1)}$$

Teorema de Rouche Frobenius o de Kronecker.

Un Sistema de Ecuaciones Lineales es Compatible si y solo si la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los término independientes tienen igual rango.

Es decir: $A.X = B \quad es \quad compatible \Leftrightarrow rg(A) = rg(A^a)$

Por el contrarrecíproco se tiene: $A.X = B \quad es \quad incompatible \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(A^a)$

***Corolario**. Conjunto Solución de un Sistema Lineal Compatible.*

Sea *A.X* = *B* un Sistema Lineal Compatible, es decir que rg(A) = rg (A^a) y sea *n* el número de incógnitas donde $A \in R^{mxn}$, $X \in R^{nx1}$ y $B \in R^{mx1}$.

Se presentan las siguientes situaciones:

1. Si el rango de la matriz de coeficientes es igual que el número de incógnitas, entonces el sistema lineal es determinado.

   Si r = n $\Rightarrow$ *A. X* = *B* es Compatible Determinado.

2. Si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema lineal es indeterminado.

   Si r < n $\Rightarrow$ *A . X* = *B* es Compatible Indeterminado.

   (Las *r-incógnitas* se llaman variables principales y las *n-r incógnitas* restantes se llaman variables secundarias o libres)

Nota.

Este teorema permite determinar la Compatibilidad o Incompatibilidad de un sistema lineal, con tan solo comparar el rango de la matriz de coeficientes con el rango de la matriz ampliada y sin necesidad de resolver el sistema por otro método.

Actividad 22:

Aplicar el método de Gauss- Jordan para resolver el sistema lineal. Mediante el Teorema de Rouchè – Frobenius analiza su compatibilidad. Si el sistema es Indeterminado dar una solución general y dos particulares.

a) $\begin{cases} 4x+y+z & = & -3 \\ 3.(2x+4) & = & 0 \\ -x+2y-z-3 & = & 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a - b + 2c = 2 \\ -4a + 2b - 4c = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+z & = & 3+2y \\ 2.(x-z)+y & = & 2 \\ 4x-y-7 & = & z \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$

e)

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 4 \\ 3x + 2y + z & = & 7 \\ 5x - 2y + 2z & = & 1 \\ 3x - y - 7z & = & 1 \end{array}\right\}$$

f)

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 8 \\ 3x - y + 4z & = & 11 \\ 4x - 3y + 5z & = & 3 \\ x + 3y + 2z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Actividad 23: Analiza la compatibilidad del Problema:

En un supermercado un cliente compra 12 latas de aceitunas de un total de tres marcas distintas. Si el número de latas de la marca A es igual a 3/2 el número de latas de la marca B, y éste, a su vez, es igual a dos veces el número de latas de la marca C. Se pide:

¿Cuántas latas compró de cada marca?

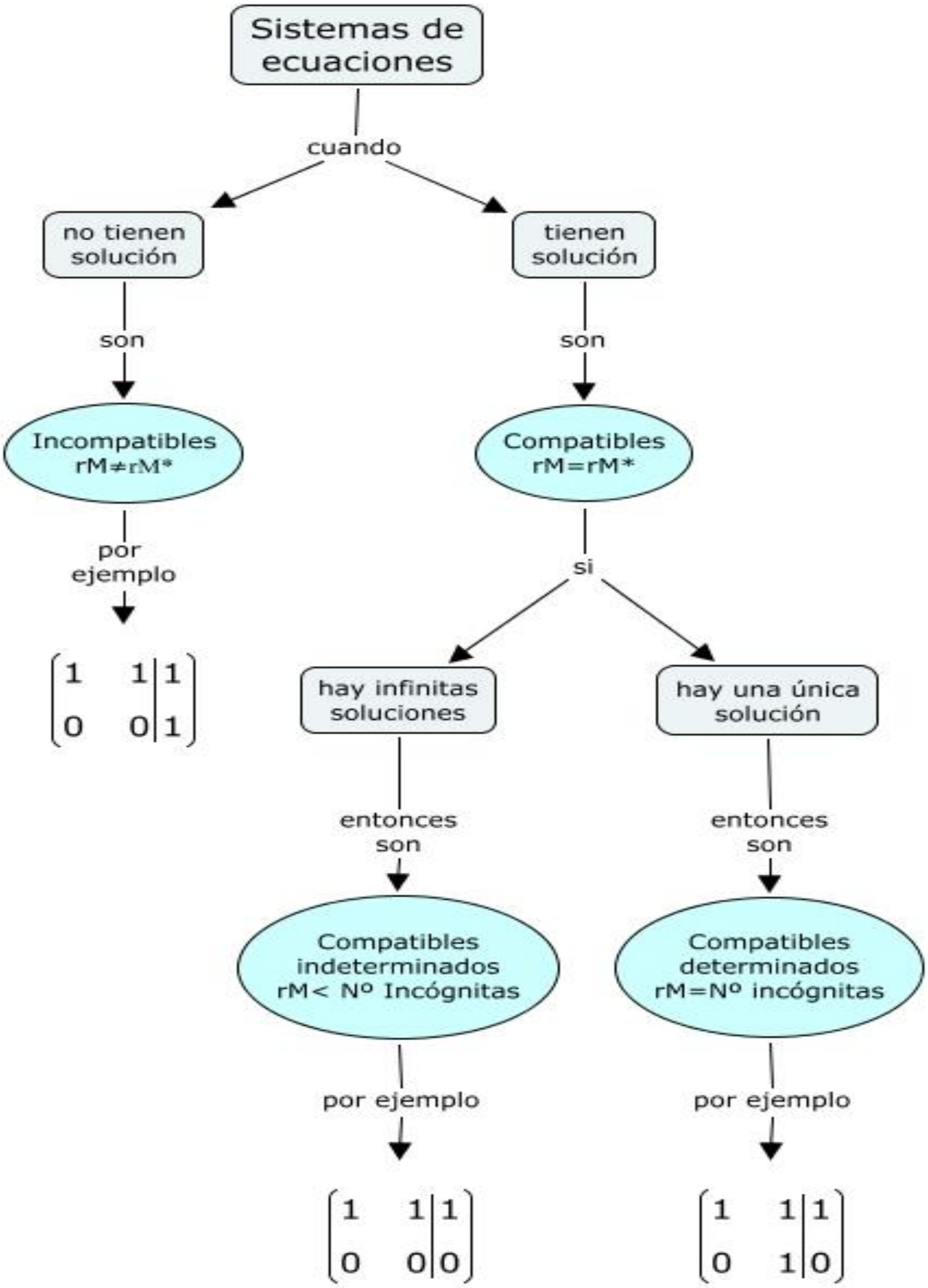
Actividad 24: Comprueba que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y - 5z + t & = & 0 \\ 3x - y - 5z - 6t & = & 0 \\ x + 2y - 4z + 5t & = & 0 \\ -x + 3y - z + 10t & = & 0 \end{array}\right\}$$

Tiene infinitas soluciones y cuya solución general es el conjunto:

$$\{(2z+t\ ,\ z-3t,\ z\ ,\ t)/\ z,\ t \in \mathbf{R}\}$$

En definitiva, en el siguiente esquema se puede resumir lo dado en esta última parte.



Aplicaciones económicas:

25- Para un fabricante de bolsas grandes con papitas , el costo de mano de obra y de los materiales por unidad es de \$ 2 y los costos fijos son de \$ 100 al día. Si vende cada bolsa \$6 ¿Cuántas bolsas deberá producir cada día con el objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

26- Un fabricante elabora tres clases de mermelada: A, B, C. Las cantidades, en gramos, de azúcar, gelatina y agua que contiene cada tarro de mermelada vienen indicadas en la siguiente:

	A	B	C
Azúcar	2	4	3
Gelatina	1	1	2
Agua	1	2	2

Si las existencia del fabricante son 2900 kilogramos de azúcar, 1400 kg de gelatina y 1700 litros de agua, calcula cuántos tarros de mermelada de cada clase se pueden fabricar con las existencias que posee.

27- Se dan tres aleaciones de plata, cobre y oro, con la siguiente composición:

	Plata	Cobre	Oro
Aleación I	5 %	10 %	85 %
Aleación II	15 %	20 %	65 %
Aleación III	10 %	35 %	55 %

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una para que al mezclarlas se obtengan 50 gramos de una nueva aleación que contenga el 11 % de plata, el 29 % de cobre y el 60 % de oro?

28- Una empresa automovilística construye 3 modelos de coche: A, B, C. Cada modelo requiere una cierta inversión en carrocerías , montaje y motores.

Cada unidad del modelo A necesita una inversión de 2 u.m. en carrocerías, 3 u.m. en montaje, y 3 u.m. en motores. Cada unidad del B requiere 1 u.m en carrocerías, 2 u.m. en montaje y 1 u.m. en motores. Cada unidad del modelo C necesita que se inviertan 3 u.m. en carrocerías, 2 u.m. en montaje y 4 u.m. en motores.

Calcule cuántas unidades de cada modelo hay que construir si la empresa puede invertir 8.000 u.m. en carrocerías, 10.500 u.m. en montaje y 10.500 u.m. en motores.

29- Un museo tiene tres salas de exposiciones: A, B y C. los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 euros. Un determinado día entraron a las tres salas un total de 210 personas, siendo la recaudación conjunta igual a 810 euros. Teniendo en cuenta que la novena parte de los visitantes de la sala A es igual a la séptima parte de los visitantes de la sala B, determinar el número de visitantes de cada sala. Justificar la respuesta.

30- Un financiero invirtió en bolsa 18000€ en acciones de tres empresas, A, B y C, y obtuvo un beneficio de 900€. Si sabemos que invirtió en A tanto como en B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron de un 5% en A, un 3% en B y un 10% en C,
¿Cuánto invirtió en cada una?

Para Ejercitarse:

DETERMINANTES

1) Indicar las propiedades y/o axiomas de los determinantes que se aplican :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

2) Calcular los determinantes siguientes transformando en matrices triangulares de igual determinante mediante propiedades para agilizar el cómputo.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, comprueba que $\begin{cases} M_{11} = -13\ , \quad M_{23} = 0 \\ A_{34} = -6, \quad A_{44} = -13 \end{cases}$

4) Demostrar , sin desarrollar que : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

5) Sabiendo que:

$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 40$, calcula aplicando axiomas o prop. el valor del siguiente :

$$\begin{vmatrix} 2b_{11} & 2b_{13} & 2b_{12} \\ 2b_{21} & 2b_{23} & 2b_{22} \\ 2b_{31} & 2b_{33} & 2b_{32} \end{vmatrix}$$

6) Halla el valor de a y b para que el determinante dado sea nulo

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & a & b \end{vmatrix}$$

7) Demostrar aplicando propiedades y/o axiomas que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

8) Sabiendo que: $\left|\begin{bmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right| = 4$ Calcular: $\left|\begin{bmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right|$

9) Obtener la adjunta de las matrices

$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

10) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3x3, y D(A) = 2 $\wedge$ D(B) = 4. Calcular:

a) $D(B^{-1})$ b) $D(A^{t}.\ A^{-1})$

c) $D[\ 4.B^{-1}]$ d) $D\ (A^{-1}\ .\ B^{t})$

11) Determina el valor de x que verifique las igualdades:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = 4$ b) $3.\begin{vmatrix} x & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -1 & 2x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$

12) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué valor debe tomar “x” para que D(A) = 25 ?

b) ¿Cuánto debe valer x para que el rg (A) $\neq$3 ?

c) En el caso anterior explicar por que debe tomar ese valor el determinante.

Nota: Un definición alternativa de rango de una matriz es:

El *Rango de una matriz A* es el tamaño del mayor menor complementario no nulo que esté incluido dentro de la matriz.

13) Averigua para que valores de **a** , la matriz B no tiene inversa.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix}$$

14) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix}$$

15) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 10$$

16) Resuelve la ecuación: A.X = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

17) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Halla una matriz, X, tal que $AX = B$.

18) Resuelve matricialmente los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+4y=0 \\ 5x-6y=0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+4y-z=8 \\ x+y+z=3 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \quad d)\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

19) Determinar si existe la matriz X, tal que A.X = H

$a)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

20) Verifique si el vector columna v_1, es solución del sistema matricial dado:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \ \mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Analice sí esta es la única solución del sistema

b) En caso contrario, determine la solución general del mismo.

21) Analizar y resolver los siguientes sistemas lineales. En caso de ser factible deberá hacerlo utilizando los dos métodos vistos en teoría

$a)$
$$\begin{cases} 2 - y = x \\ 3 + x = -y \end{cases}$$

$b)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$c)$
$$\begin{cases} -3x + y + z = -3 \\ 4x - 3y + 3z = -10 \\ x - 2y - 4z = -4 \\ x + y - z = 8 \end{cases}$$

$e)$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$e)$
$$\begin{cases} x - y + 3z + w = -14 \\ x + 2y - 3w = 12 \\ 2x + 3y + 6z + w = 1 \\ x + y + z + w = 6 \end{cases}$$

22) Determinar si el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$ tiene solución distintas de la trivial.

23) Hallar los valores de k para los cuales el sistema dado tenga soluciones distintas de la trivial

$$\begin{cases} x+2y+kz &= 0 \\ 2x+ky+2z &= 0 \\ 3x+y+z &= 0 \end{cases}$$

24) *Una empresa ha vendido 42000 artículos de papelería, bolígrafos, gomas y rotuladores, al precio de 1.2, 1.5 y 2 € respectivamente. El total de los ingresos producidos por esas ventas asciende a 64000 € . Se sabe, además, que el número de bolígrafos que se ha vendido es el 40% del número total del resto de artículos vendidos*.

Plantear un sistema para determinar el número de cada tipo de artículos vendidos y resolver.

25) Una empresa elabora tres productos A, B y C, los que manufactura en tres máquinas.
El tiempo en horas requerido para procesar una unidad de cada producto, está dado por la matriz:

	Producto A	Producto B	Producto C
Maquina I	3	1	2
Maquina II	1	2	4
Maquina III	2	1	1

Si se dispone de las maquinas I, II y II por 850 hs., 1200 hs. y 550 hs. respectivamente.
Cuantas unidades de cada producto deberían producirse para emplear todo el tiempo disponible de las máquinas.

26) Las ecuaciones de la oferta y la demanda de cierto artículo son 3p + 5x = 200 y 7p – 3x = 56 respectivamente, se pide determinar los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado. Graficar.

27) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al del hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

28) Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.

b) Resolver el sistema.

29) Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de papas, manzanas y naranjas a un precio de 10, 12 y 15 $ /kg., respectivamente.
El importe total de la compra fueron $ 116 . El peso total de la misma 9 kg.
Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.
a) Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.
b) Resolver el problema.

30) En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr., 500 gr. y 1 kg.
Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr.) que de tamaño mediano (500 gr.). Sabiendo que el precio del kg. de bombones es $ 50 , y que el importe total de los bombones envasados asciende a $ 280 .
a) Plantear un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo.
b) Resolver el problema.

31) *Una persona disponía de 60.000 € y los repartió en tres fondos de inversión diferentes (A, B y C), obteniendo así 4.500 € de beneficios. Sabemos que en el fondo A invirtió el doble que en los fondos B y C juntos; sabemos también que el rendimiento de la inversión realizada en los fondos A, B y C fue del 5%, 10% y 20% respectivamente.*
a) Plantear un sistema para determinar las cantidades invertidas en cada uno de los fondos.
b) Resolver el sistema anterior.

32) El precio de entrada a cierta exposición es de $ 20 para los niños, $ 50 para los adultos y $ 25 para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fué visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos.
La recaudación de dicho día ascendió a $ 7.350 .
a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día.
b) Resolver el problema.

33) Una persona colocó $ 20.000, en tres inversiones al 6%, 8% y 10%.
El ingreso total anual fue de $ 1.624, y el ingreso correspondiente al fondo del 8% fue el doble de el del 6%. ¿De cuánto fue cada inversión ?

34) Dos productos A y B compiten en el mercado. Las demandas X_A y X_B de esos productos están relacionadas a sus precios P_A y P_B por las ecuaciones:
$X_A = 17 – 2.\ P_A + ½.\ P_B$ y $X_B = 20 – 3.\ P_A + ½.\ P_B$
Mientras que las ecuaciones de la oferta son:
$P_A = 2 + X_A + 1/3.\ X_B$ y
$P_B = 2 + ½\ .\ X_B + 1/4.\ X_A$
Encuentre el punto de equilibrio del mercado.