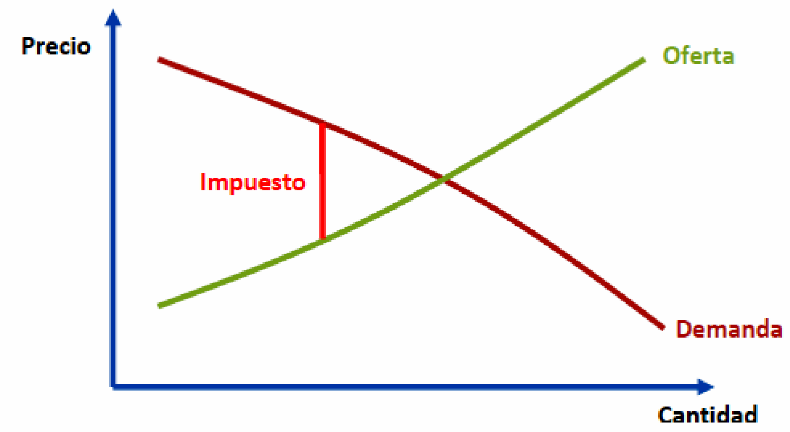
Guía de trabajos Teórico- Práctico Nº 5



UNIDAD V:

5.1 Números Reales. Sistema Axiomático de Números Reales.

Axiomas de Cuerpo, orden y Completitud. Propiedades

5.2. Intervalos. Valor absoluto de un número real. Propiedades.

Entorno. Entorno reducido. Punto de acumulación.

5.3. Funciones Reales. Dominio e Imagen. Representación.

Clasificación de funciones. Transformación de funciones.

Algebra de funciones reales. Composición de funciones.

5.4. Límite finito de funciones reales. Definición e interpretación.

Límites laterales. Propiedades de los límites. Límites especiales.

Límites infinitos. Limite en el infinito. Límites indeterminados.

5.5. Funciones continuas. Definición. Tipos de discontinuidades.

Algebra de funciones continúas. Propiedades.

Teoremas de funciones continuas.

5.6. Ejercicios Complementarios.

5.1. Números Reales

En todo introduccion al cálculo, es muy importante el concepto de número real.
Al conjunto de los números reales lo denotaremos por R y se aceptará como ya sabemos que: contiene, entre otros, a los conjuntos de los números naturales (N), enteros (Z) y racionales(Q).

Todos sabemos por ejemplo que $0x = 0$. Es una propiedad evidente, pero
¿Se puede probar?
O bien: demostrar que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$

Definiremos el sistema axiomatico de los números reales, considerando que es suficiente tener un marco de referencia de enunciados o axiomas, para poder deducir y demostrar propiedades, lemas, teoremas ,como las dadas arriba.

Sistema de los Números Reales

Si llamamos con **R** al conjunto de **los números reales** y definimos **dos l.c.i.** en el :
+ (suma) y **.** (producto) , podemos presentar al sistema de los números reales axiomaticamente indicando**:**

*** (** ***R*****, + , .)** tiene estructura de **Cuerpo** Conmutativo,
* R es **Ordenado** y
* R es **Completo.**

¿Qué significa que el conjunto de los Reales tenga estructura de cuerpo conmutativo?

Actividad 1:

Completa el cuadro colocando la forma simbólica correspondiente a los axiomas de cada operación definida, usando a, b, c y d como representación de números reales cualesquiera.

Axiomas de la suma	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de opuesto	
Conmutativa	

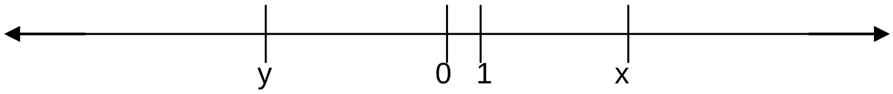
Axiomas del producto	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de inverso	
Conmutativa	
Distributiva respecto de la suma	

Recta Real:

El conjunto R de todos los números reales se puede representar geométricamente por puntos en una recta llamada eje o recta real.

Se escoge un punto en el eje para representar al número 0. Este punto se llama origen.

Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en el eje, es decir, a cada número real le corresponde un único punto en el eje y a cada punto en el eje se le asocia un solo número real.



¿Qué significa - y? ¿Donde se ubicará en la recta?

Supongamos que x = $2\sqrt{5}$.

Si bien esta a la derecha del 1 ,¿entre que números enteros se ubica x?

Si intentamos ayudamos con una calculadora y lo resolvemos obtendremos un valor, digamos

m = …………(por aproximacion)

piense:¿Qué opción es la mas correcta: m = a o m < a ?

Par clarificar estas cuestiones presentaremos una definición y los axiomas de orden:

Relación de menor :

Si a y b son números reales, R^+ es la conjunto de los reales positivos, se dice que:

a es menor que b si y solo si la suma de b con el opuesto de a (-a) es positivo.

Simbólicamente: $a , b \in \boldsymbol{R} \,;\, a < b \Leftrightarrow b + (-a) \in \boldsymbol{R}^+$

Geometricamente: *a < b si y solo si a está a la izquierda de b en la recta real.*

Nota: $a > 0$ significa que **a es positivo** y si $a < 0$ significará que **es negativo**.

Decir que R **es ordenado**, significa que los números reales se pueden **ordenar**.

Axiomas de Orden:

O1: [Ley de tricotomía]: Para cada numero real *x* se verifica que:

o bien es *x* = 0, o bien *x* es positivo, o bien su opuesto −*x* es positivo.

O2: [Estabilidad de R+**]** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Actividad 2:

¿Qué número real es menor: $2\sqrt{5}$ o $5\sqrt{2}$? (procura no usar calculadora)

Desigualdades:

Las siguientes propiedades se utilizan para operar con desigualdades:(no las demostraremos)

Dados los números reales x,y,z , se cumplen:

1.transitiva: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

2. $x < y$ e $y < x \Rightarrow x = y$.

3. *Se verifica exactamente una de las tres relaciones:* $x < y \vee x = y \vee y < x$.

4. $x < y \Rightarrow x+z < y+z$.

5. $x < y$, $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

6. $x < y$, $z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

7. $x\,y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$ (vale para el cociente tambien)

A su vez. $x^2 > 0$ *y, en particular,* $1 > 0$.

8. $x\,y < 0 \Rightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$ (vale para el cociente tambien)

9. $z > 0 \Rightarrow \frac{1}{z} > 0$

Actividad 3:

Sabiendo que $a + b > c + d$, $a > b$, $c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las siguientes $a > c$, $a > d$, $b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Problema:

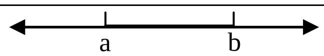
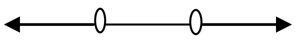
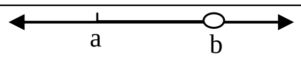
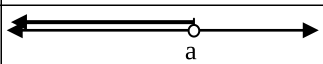
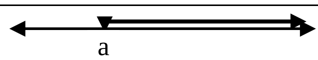
El presupuesto de una reparación es de $ 350 con un error posible del 15%

¿Entre que valores puede estar comprendida esa reparación?

El orden definido en el cuerpo de los numeros reales nos permite definir y caracterizar subconjuntos notables como son los intervalos y uniones de estos.

5.2. Intervalos

Sean a, b $\in R$; con a < b y $-\infty$, $+\infty$ dos elementos ideales asociados a *R*. Definimos:

	notación	Conjunto	Gráfica
Intervalo acotado cerrado	[a, b]	$\{ x \in \Re \,/\, a \leq x \leq b \}$	
Intervalo acotado abierto	(a, b)	$\{ x \in \Re \,/\, a < x < b \}$	
Intervalos acotado semiabierto O semicerrado	[a, b)	$\{ x \in \Re \,/\, a \leq x < b \}$	
Intervalos no acot abiertos	$(-\infty, a)$	$\{ x \in \Re \,/\, a > x \}$	
Intervalos no acot semiabiertos	$[a, +\infty)$	$\{ x \in \Re \,/\, a \leq x \}$	

Actividad 4:

Escribe como intervalo los siguientes conjuntos. Luego representar en la recta:

a) A = { x ∈ *R* / $-3 \leq x \leq 1$ }

b) A = { x ∈ *R* / $x > -2$ }

c) A = { x ∈ *R* / $4 > x$ }

d) A = { x ∈ *R* / $-4 < x < 5$ }

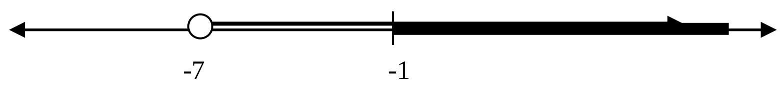
e) A = { x ∈ *R* / $-2 \leq x < 8$ }

A su vez **operando** con los intervalos se pueden definir nuevos subconjuntos de R.

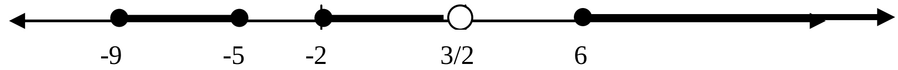
Actividad 5:

Escribe el conjunto solución indicado por el gráfico:

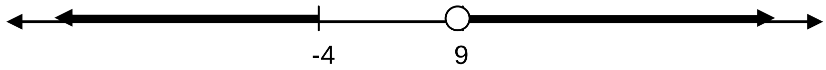
a)



b)



c)



Actividad 6:

1- Determina el conjunto solución (intervalo) y representa en la recta :

a. $-4 < 2.x - 2 < -2$ b. $\frac{11 - 5x}{2} > \frac{3x - 5}{4}$

c. $3x + 2 < 8x - 3 < 3x - 7$

Actividad 7:

Obtenga y grafique el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

i) $(x - 7).(x + 1) > 0$

ii) $\frac{2x - 6}{x - 2} \leq 0$

iii) $\frac{-9}{t - 3} < 0$

Un enunciado importante relacionada con el orden es **la acotación**: un subconjunto A de R se dice que esta acotado superiormente si existe un numero real M, llamado cota **superior** que es mayor o igual que cualquier elemento de A. Sustituyendo mayor por menor obtenemos las definiciones de subconjunto acotado inferiormente y de cota inferior.

Si un conjunto esta acotado superior e inferiormente simplemente le llamamos acotado.

Axioma de completitud:

"todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente (inferiormente) tiene supremo (ínfimo) ".

A tal elemento se le llama supremo y se lo denota por sup(A).

Si el supremo pertenece al conjunto se le denomina máximo y denotamos max(A).
Conceptos duales considerando acotación inferior en lugar de superior son el ínfimo, inf(A), y el mínimo, min(A). (para ampliar ver anexo complementario)

Actividad 8:

Indicar que conjuntos está acotado superiormente (o inferiormente) , y si tiene máximo (o mínimo):

a) $A = [-3, 6)$
b) $B = (-\infty , 3]$
c) $C = (- \infty , -1) \cup [3 , \infty)$
d) $D = (0 , 5) \cup [5 , \infty)$

Valor Absoluto:

Si x es un número real, el valor absoluto de x, ($|x|$), se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

distancia: entre dos números reales a y b la designamos por $d(a,b)$ y se define como:

$$d(a,b) = |a - b|$$

Propiedades del V absoluto:

- $x \in R$: $|-x| = |x|$
- $a \in R^+$: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ Ejemplo: $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$
- $a \in R^+$: $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \vee x < -a)$
- Desigualdad triangular: $x, y \in R$; $|x + y| \leq |x| + |y|$

  Producto: $x, y \in R$: $|x . y| = |x| . |y|$

Actividad 9:

Escribe V(verdadero) o F(falso) según correponda. Justifica

a) $|x| = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$

b) $|x| \leq 2$ representa el intervalo $(-\infty , 2]$

c) $|-9 + 5| < |-9| + |5|$

d) $|x| > 9$ está acotado

e) $|x| < 6 \Rightarrow -6 < x < 6$

Actividad 10:

Encontrar y representar los valores de "x" que verifiquen las siguientes:

a) $|3x - 2| = 16$ b) $15 > |x|$ c) $x^2 \leq 49$

Entorno

Sean $a , r \in R$ y $r > 0$

Definición :

Se llama entorno de centro a y radio r al conjunto de todos los números reales que están en el intervalo $(a–r , a+r)$.

Lo expresamos

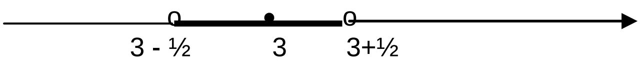
$$\mathbf{E_{(a,r)} = \{ x \in R \ / \ a-r < x < a+r \}}$$

Usando notación de valor absoluto, al conjunto anterior lo podemos expresar:

$$\mathbf{E_{(a,r)} = \{ x \in R \ / \ |x - a| < r \}}$$

Ejemplo: $E_{(3,\frac{1}{2})} = \{ x \in R \ / \ 5/2 < x < 7/2 \}$ ó $E_{(3,1/2)} = \{ x \in R \ / \ |x - 3| < ½ \}$

Gráficamente se representa:



Entorno reducido

Se denomina entorno reducido de a y radio r al entorno de centro a y radio r menos el centro. Es decir $E^*(a, r) = E (a, r) - \{a\}$.

Actividad 11:

Expresa como intervalos los siguientes entornos, representa en la recta y propone un valor de x perteneciente a cada uno:

i) $E_{(1,1/3)}$

ii) $E^*_{(-1,1/5)}$

iii) $E_{(3,1/4)}$

Actividad 12:

Expresa como entorno o entorno reducido y luego representa en la recta los siguientes conjuntos:

a) (-2, 2)

b) (3, 7) - {5}

c) (-1, 0) – {-1/2}

d) (-3,-1)U (-1,1)

Punto de acumulación de un conjunto

Definición: Se dice que **a** es un punto de acumulación (p.ac.) de un conjunto A cuando todo entorno de **a** tiene puntos de A distintos del propio punto **a**

Simbólicamene:

Sean: $A \neq \varnothing$, $A \subset \Re$, $r \in \mathbf{R}^+$

a es pac de A $\Leftrightarrow \forall E^*(\mathbf{a}, r): E^*(\mathbf{a}, r) \cap A \neq \varnothing$

Actividad 13:

Indica con $\in$ o $\notin$ y además si es o no p.ac. de A :

a) $a = 2$ y $A = \{ x \in R \ / \ -7 \leq x < 2 \}$

b) $a = -½$ y $A = \{ x \in R \ / \ x < -1 \}$

c) $a = -½$ y $A = \{ x \in Z \ / \ x < -1 \}$

d) $a = ¼$ y $A = \{ x \in R \ / \ |x| \leq 0{,}25 \}$

e) $a = -1$ y $A = \{ x \in R \ / \ -2 \leq x \leq 5 \wedge x \neq -1 \}$

5.3. FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

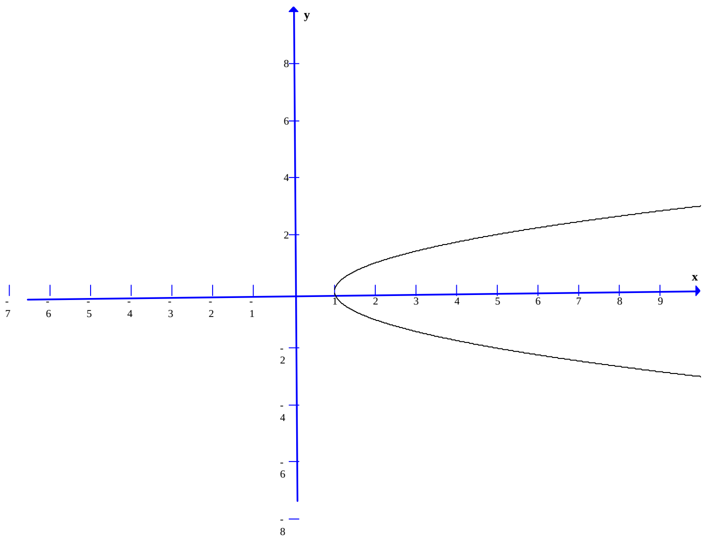
Problema 2:
Una empresa textil plantea analizar el aumento de la temperatura de sus máquinas diariamente desde que inician su funcionamiento y observa que tal valor se rige en forma muy aproximada mediante la siguiente fórmula:

$$T(x) = \sqrt{x-1}$$

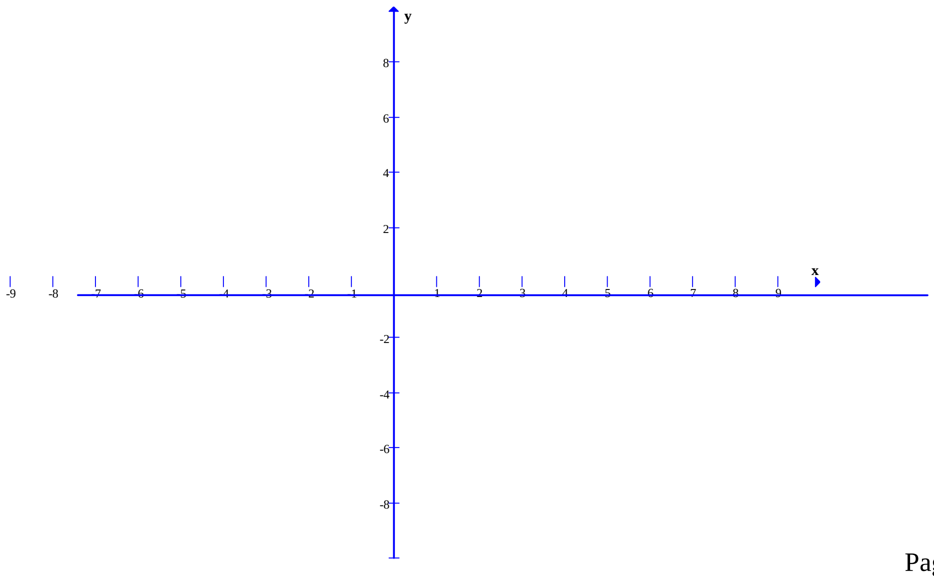
donde x: representa la cantidad de hs
T(x): la temperatura en ºC

Un empleado (que tiene unicamente el secundario) intenta graficar dicha fórmula aplicando lo "aprendido" en su colegio.
Sabe que la raiz cuadrada tiene dos soluciones, que se utiliza una tabla de valores y que luego dichos valores se ubican en un sistema de coordenadas cartesianas:

x	C(x)
1	0
2	1
2	-1
5	2
5	-2



Pero esta gráfica **no corresponde** a una función ¿Por qué?¿Donde esta el error?
La fórmula ¿es una funcion? En el caso afirmativo cuál es su dominio y recorrido?
Rehacemos en tal caso el gráfico:



Función real:

Se llama *función real de variable real* a toda relación definida de un subconjunto *D* de los números reales, en el conjunto ***R***, tal que a cada elemento ***x*** de *D* le corresponde **uno y sólo** un elemento ***y*** de **R.**

Dicha aplicación se expresa como:

$$f : D \to R$$
$$x \to y = f(x)$$

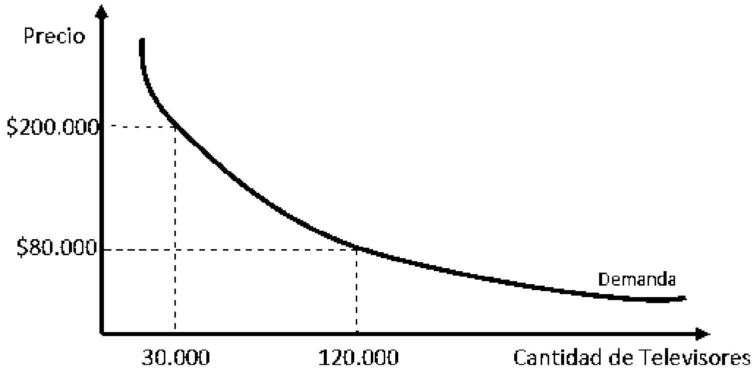
Donde y es el número o imagen que f asocia a x .

Tambien la expresion : y=f(x), define una relacion entre la **variable x** (variable independiente) e **y** (variable dependiente). Por lo tanto, para determinar una función, bastará con establecer una regla que nos permita hallar el valor de la imagen de x.

Ejemplo 1: $f : D_f \to R / f(x) = x^2 - 4$

Ejemplo 2: La regla que asigna a cada longitud l de un cuadrado su área A.

Ejemplo 3: La funcion de demanda de TV, cuya curva se represnta:

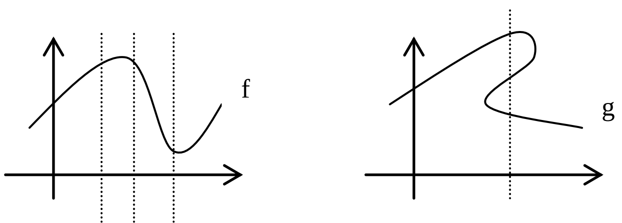


Para que una función quede correctamente definida es necesario determinar:

* El **dominio** de la función: que se nota con D_f
* El **recorrido** de la función: conjunto de las imágenes de todos los elementos del D_f
  Es un subconjunto de R, que se nota con R_f ,
* La **regla** por la cual se asigna a cada elemento del D un solo elemento del conjunto Imagen**.**

Gráfica de una función real : Es el conjunto de todos los pares de números reales*(x, y)* determinados por la función f .Cada par de números corresponde a un punto del plano. Uniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica de la función.

Observación: Si trazamos paralelas al eje de ordenadas, estas no pueden intersectar al gráfico de una funcion en más de un punto, pues de lo contrario habría más de una imagen para ciertos elementos del dominio . Ejemplos:



Actividad 14:

Indicar cuales de las siguientes relaciones son funciones. Justifica explicando aquellas que no lo sean.

a) { (x,y) / y =2x + 4}

b) {(x,y) / x + y^2 = 1}

b) { (x,y) / y + x^2 = 1 }

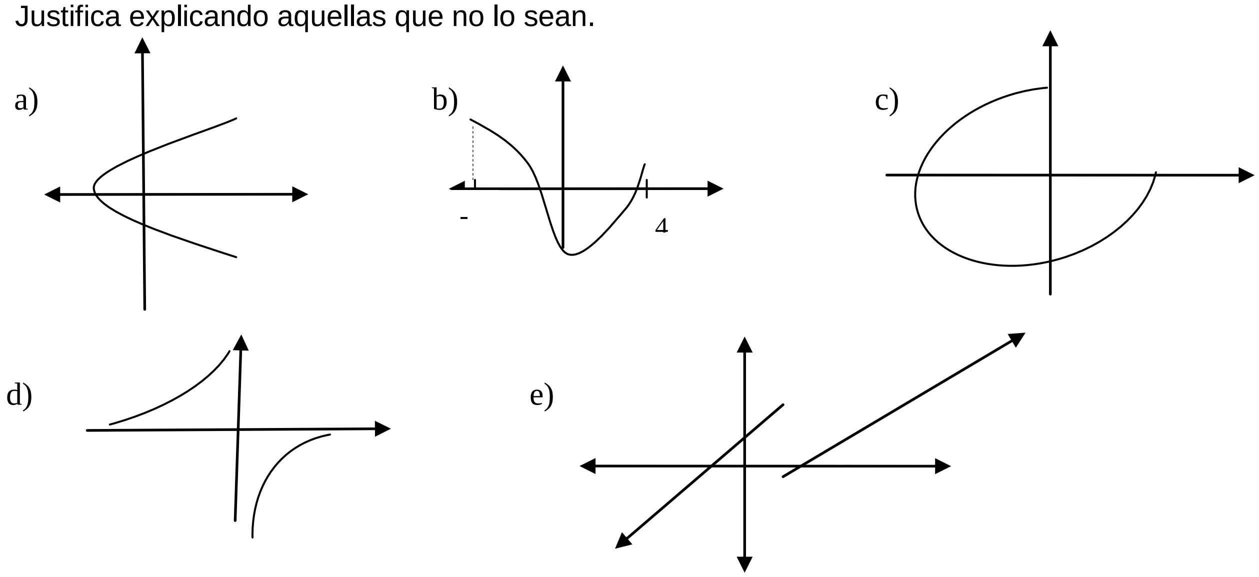
c) { (10,4),(4,8),(10,6)}

d) { (x,y) / x $\leq$ y}

e) { (x,y) / $|x| + |y|$ =1 }

Actividad 15:

1) Determinar y justificar cuáles de los siguientes gráficos representan funciones en *R*:
Justifica explicando aquellas que no lo sean.



Actividad 16:

Obtener la regla de correspondencia de $f(x+1)$, sabiendo que : $f(x-1)=x^2$

<u>Dominio</u> <u>de una función</u>: Es el conjunto de todos los **valores posibles** que puede tomar x al aplicársele una función f.

Por ejemplo: si $f(x)= x^3 - 4x +6$ el $D_f = R$, puesto que f **esta definida** para cualquier valor real que asuma x.

En cambio : $g(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$

No tiene sentido o no está definida para x= -2 . Luego $D_g = R-\{2\}$

CLASIFICACION DE FUNCIONES

Teniendo en cuenta las **operaciones** que relacionan a la **variable independiente**, las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes.

Función

Algebraica (+ , -, x, / , pot. rad.)

- **Racionales** (+, -, x, /, pot.)
  - **Enteras** (+, -, x, pot.)
    - **Funciones Polinómicas**
      - Casos particulares:
        - Función lineal: y = m x + b (recta)
        - Función cuadrática: y = a x^2 + bx + c (parábola)
  - **Fraccionarias** (+, -, x, pot.) /
- **Irracionales** (+, -, x, /, pot.) **radic.**

Trascendentes

- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Logarítmicas
- Exponenciales
- Hiperbólicas
- Hiperbólicas inversas

De las infinitas funciones que existen, las más usuales y básicas (que se deben conocer) , al igual que sus dominios, son:

Funciones polinómicas:

son de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$

donde $n \in N_0$ es el grado del polinomio y $a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0$ son coeficientes.

Este tipo de funciones **siempre tiene como dominio** $D_f = R$

En particular:

Si n = 0	$f(x) = a_0$	función constante
Si n = 1	$f(x) = a_1 x + a_0$	función lineal
Si n = 1	$f(x) = x$	función identidad (*con* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$)
Si n = 2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	función cuadrática
Si n = 3	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	función cúbica

Actividad 17:

Escribe el tipo de función polinómicas que corresponda a las siguientes fórmulas:

a) $f(x) = 9x+15$

b) $f(x) = x^3 - 6$

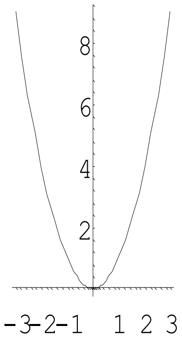
c) $f(x) = -7$

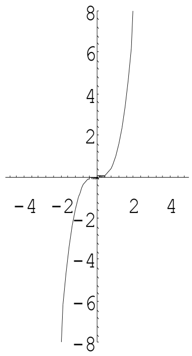
d) $f(x) = -(x+3)^2 + 4$

e) $f(x) = \dfrac{6x+5}{2}$

Actividad 18:

Escribe el tipo de función polinómicas que corresponda a los siguientes gráficos:





Funciones Fraccionarias:

son de la forma: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con P(x) y Q(x) funciones polinómicas y $Q(x) \neq 0$

El dominio es el conjunto de los reales **menos los que anulan** el denominador.

Ejemplo: la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ o $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ $D = R - \{0\}$

Actividad 19:

Determinar el dominio de las siguientes funciones racionales:

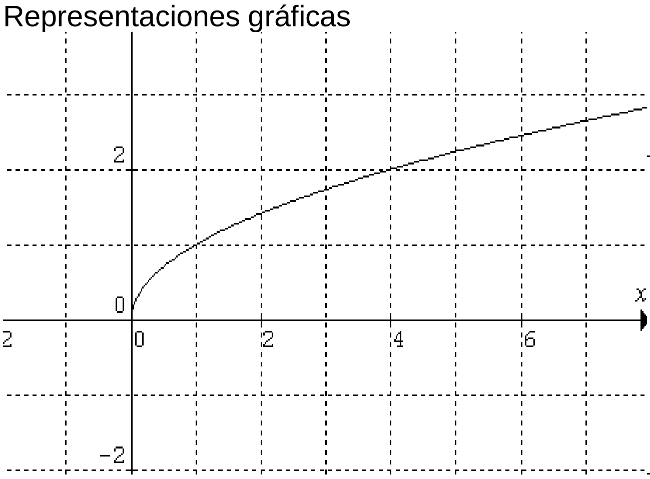
a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x}$ b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$

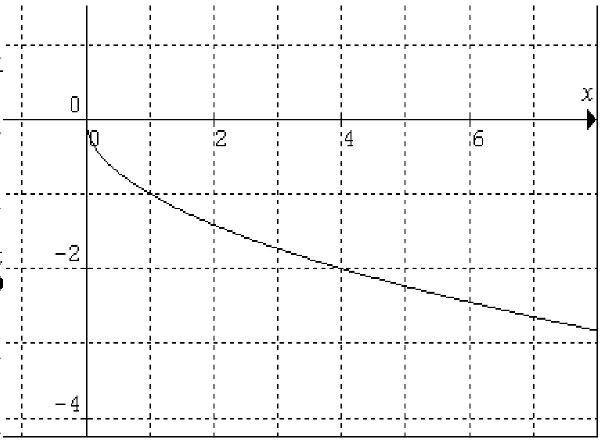
c) $f(x)=\dfrac{-x+4}{2x-4}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-9}$

Funciones raíz cuadrada:

Son de la forma $f(x)=\sqrt{g(x)}$ o $f(x)=-\sqrt{g(x)}$ con $g(x)\geq 0$.
El Dominio esta formado por todos los reales que hacen **POSITIVO** el radicando.

Representaciones gráficas





Actividad 20:

En cada expresión propone un valor real para el cual la operación **no este definida** y por lo tanto no cumpla la existencia. Luego determinar el Dominio de las siguientes funciones:

i) $g(x)=\sqrt{2x-6}$ ii) $h(x)=\sqrt[4]{-x+1}$

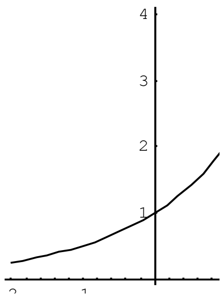
iii) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ iv) $t(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

Función exponencial:

Son de la forma $f(x) = a^{g(x)}$ donde la base $a > 0$ y $a \neq 1$.

Destacamos entre ellas las que tienen como base el número e (nº de Euler) : $f(x) = e^{g(x)}$
El **Dominio es** el conjunto ***R***..

Ejemplo: f(x)= 2^x

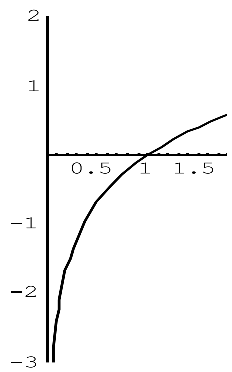


Función logarítmica:

Son de la forma $f(x) = \log_a g(x)$ con $a > 0$ y $g(x) > 0$ ***D$_f$* = *R*$^+$**

Los casos más conocidos son: $\ln x$ y $\log x$ (logaritmo neperiano y logaritmo decimal), con bases: $a = e$ y $a = 10$

Ejemplo:



Observación: Como se habrá observado en algunos de los casos**,** las funciones **No siempre** estan definidas en los Reales a los fines de que se verifique la condición de existencia. Este tipo de expresiones se dicen que están **restringidas.**

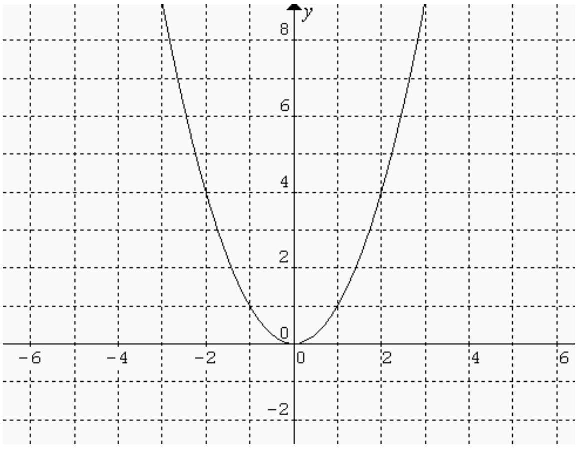
Por ello es importante **recordar**:

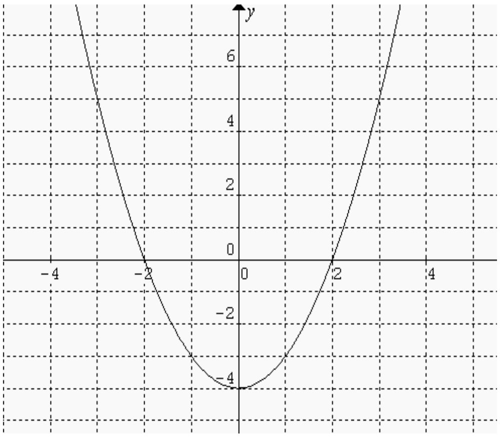
- Si la función es **fraccionaria** el **dominio** es el conjunto de **todos los números reales menos** el conjunto de **valores** que **anulan el denominador**.
- Si la función es **irracional cuadrática** el **dominio** es el conjunto de **todos los números reales** para los cuales **el radicando es mayor o igual que cero**.
- Si la función es logarítmica el **dominio** es el conjunto de **todos los números reales para los cuales el radicando es mayor que cero**.

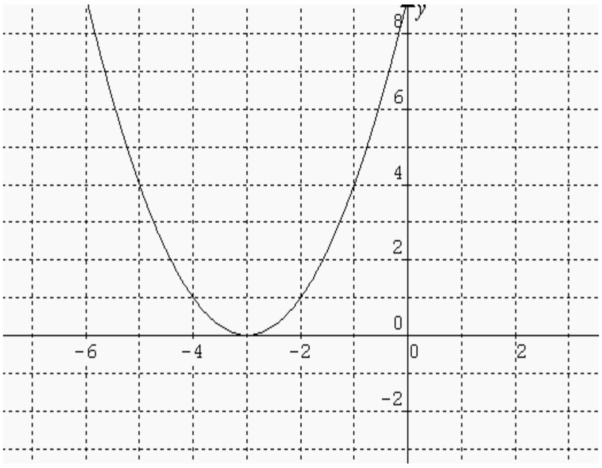
Transformación de funciones elementales

Hay funciones que difieren una de otra en una **constante**, pero que en esencia son del mismo tipo y sus gráficas se pueden obtener a partir de una de ellas que se tome como modelo.

Ejemplo: Observemos las funciones: $f(x)= x^2$, $g(x)= x^2-4$ y $h(x) = (x+3)^2$







Se dice que las gráficas de estas funciones **son transformaciones** de una que se toma como modelo. En el ejemplo las constantes son 4 y 3 que se aplican sobre x^2

Las transformaciones básicas de una función de la forma: $y = f(x)$, con c >0, son:

Traslación horizontal de c unidades a la derecha: $y = f(x-c)$
Traslación horizontal de c unidades a la izquierda: $y = f(x+c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $y = f(x)-c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $y = f(x)+c$
Reflexión (respecto al eje x) : $y = -f(x)$;
Reflexión (respecto al eje y) : $y = f(-x)$

Actividad 21:

Escribe la fórmula correspondiente a cada función de acuerdo a la condición dada y luego representa cada par.

a) $y = x^3$ transformación de 1 unidades hacia la derecha , $y_1 =$

b) $y = \sqrt{x}$ transformación de 2 unidades hacia arriba , $y_1 =$

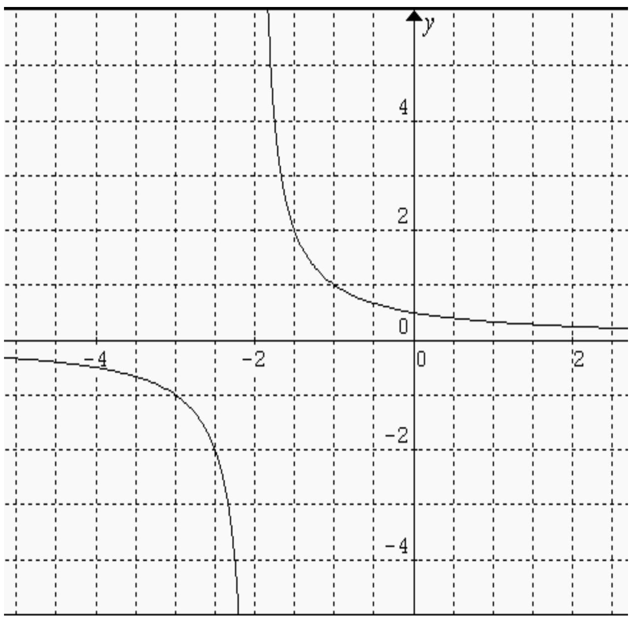
c) $y= 2^x$ transformación de 3 unidades hacia la izquierda , $y_1 =$

d) $y = 1/x$ transformación de 2 unidades hacia abajo , $y_1 =$

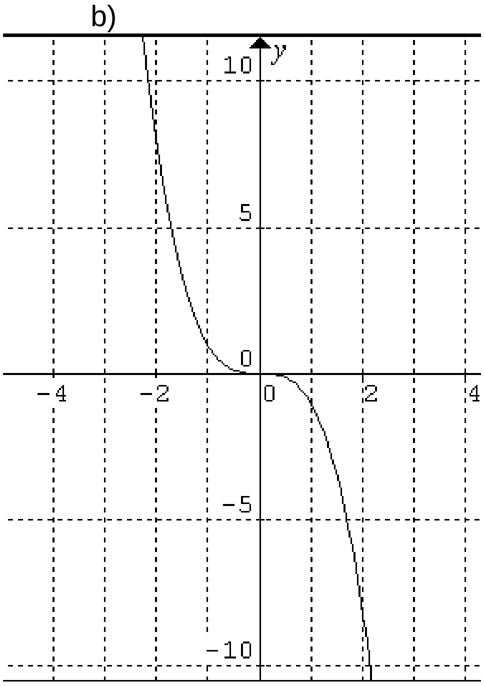
Actividad 22:

Escribe la fórmula correspondiente a cada función guiándote de las fórmulas y gráficas de funciones dadas en la actividad anterior:

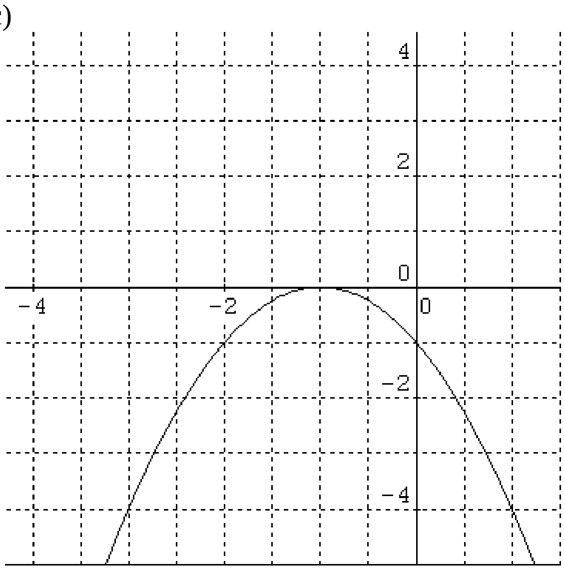
a)



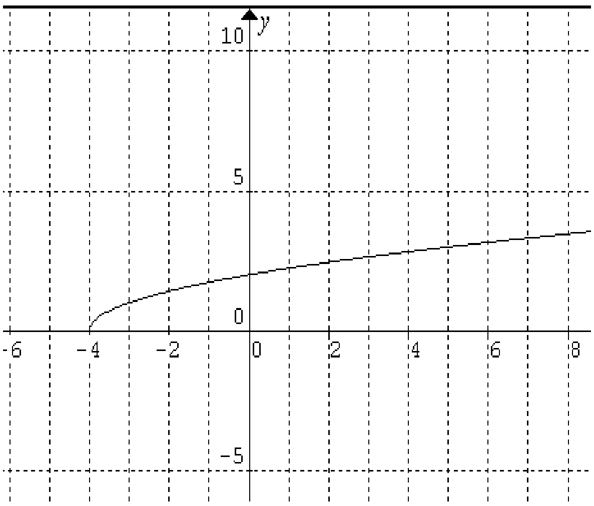
b)



c)



d)



Existen funciones llamadas **funciones por partes** que tiene como regla de correspondencia un conjunto de varias reglas de correspondencia que se cumplen para determinadas partes de su dominio y cuya gráfica resulta la unión de cada uno de los gráficos definidos. Vea el siguiente ejemplo:

Problema 2:

La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

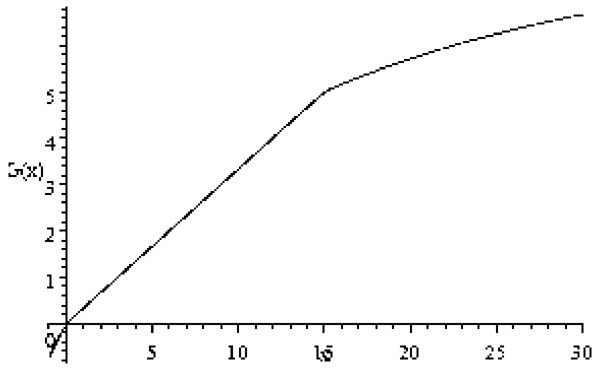
$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & si \quad 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & si \quad 15 < x \end{cases}$$

En este tipo de problemas se puede requerir:

a) *Estudiar el crecimiento de esta función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justificar que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos*.

b) *Justificar que la puntuación nunca puede ser superior o igual a 10 puntos*.

Su gráfica (en escala conveniente) es :



Actividad 23:

Determina el Dominio y representa las siguientes funciones. Indica el Recorrido de cada una

$$f : x \to \begin{cases} 2 & si \quad x < -2 \\ -x & si \quad -2 \le x \le 2 \\ -2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$$g : x \to \begin{cases} \sqrt{-x} & si \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$h : x \to \begin{cases} x^3 & si \quad x < 0 \\ -x^2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ -4 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Problema 3:

Una estación de servicio describe el beneficio semanal, de acuerdo con los litros de nafta sin plomo que vendió, según la siguiente fórmula:

$$B(x) = -x^2 + 46x - 205$$

El beneficio B se expresa en pesos y la variable x se expresa en miles de litros.

Interesa conocer:
a) ¿Cuánto dinero pierde si no vende nafta?
b) ¿Cuántos litros se deben vender para que el beneficio sea máximo?
c) ¿Para que cantidad de litros no hay pérdidas ni ganancias?

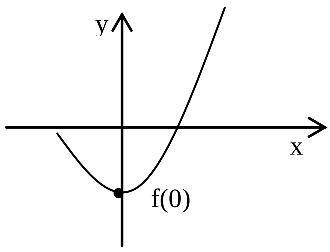
Para contestar a este tipo de preguntas y en general cuando el tipo de función no es suficiente para su representación, se debe realizar un **análisis previo** de la función además de la tabla de valores y su gráfico.

Este análisis consiste, entre otros aspectos a considerar, en :

a) Determinar el dominio y recorrido de la función.
b) Intersección con los ejes coordenados.
c) Analizar la paridad de la función.
d) Analizar la existencia de asíntotas.

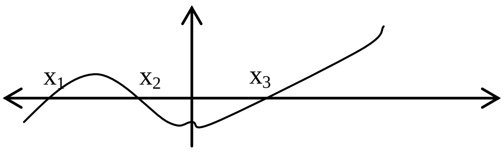
b) Intersecciones con los ejes coordenados

Son los puntos en los que la gráfica de la función interseca a los ejes de abscisas y de ordenadas.
i- **Con el eje de ordenadas** : Se obtiene haciendo x = 0. Es decir corresponde al par (0,f(0))



Observación: la intersección con el eje y, en el caso de que exista, es única.

ii- **Con el eje de las abscisas** :Se obtienen para aquellos valores x del dominio donde se anula el valor de la función. Dichos valores se denominan **ceros** de la función y son las soluciones o **raíces** de la ecuación f(x)=0



Actividad 24:

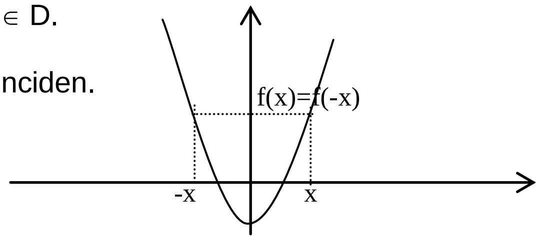
Analizar los puntos de intersección con los ejes, de la función: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c) Paridad de funciones

Función par

Una *función y = f(x)* es *par* si $f(x) = f(-x)$, $\forall$ x $\in$ D.

Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden.



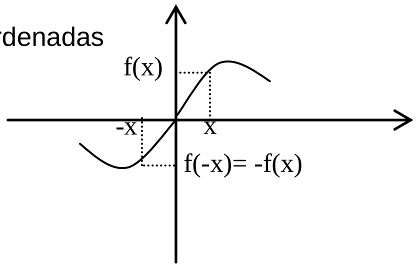
Por coincidir las imágenes de valores opuestos, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje *Y*.

Funciones impares

Una *función y= f(x)* es *impar* si $f(x) = -f(-x)$. (o f(-x) = - f(x))

A valores opuestos de *x* corresponden imágenes opuestas.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas

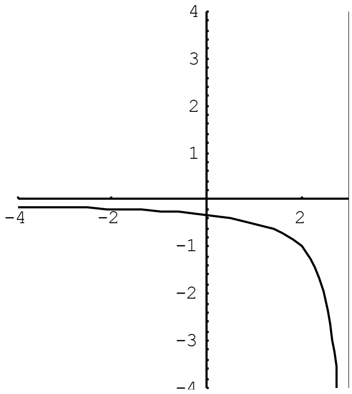


d) Asíntotas:

Son rectas que " limitan" la curva. Las hay de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

Por ejemplo:

La función racional: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, tiene asíntota vertical en x=3 , y asintota horizontal en y = 0



Actividad 25:

Analiza la paridad de las siguientes funciones y representar en el plano:

a) $g(x) = -x$ b) $g(x) = -x^2 + 4$ c) $g(x) = -x^3 - 2x$

Actividad 26:

Determinar Dominio e Imagen de las siguientes funciones así como los puntos de intersección con los ejes coordenados.¿Alguna es par?:

a) $g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ \ x < 0 \\ (x-2)^2 & si\ \ x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1} - 1 & si\ \ x < -1 \\ -1 & si\ -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} - 1 & si\ \ x > 1 \end{cases}$

Actividad 27:

Analizar las siguientes funciones determinando: dominio y recorrido, intersección con los ejes, asíntotas. Graficar(ayúdate con tablas si es necesario):

$i)\quad y = 5x - 2$

$ii)\quad y = -x^2 + 4x - 3$

$iii)\quad y = -\sqrt{x+4}$

$iv)\quad f(x) = \dfrac{-2}{x}$

$v)\quad f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$vi)\quad f(x) = 2^x$

A partir de las funciones vistas se pueden obtener otras nuevas, sumando, restando, multiplicando, dividiendo (con denominador no nulo) o haciendo composición de funciones.

Algebra de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales con $f: D_f \to R$ /y=f(x) ; $g: D_g \to R$ / y=g(x) y $D_f = D_g$

Suma de funciones
Se define a la función: $f+g : D \to R$ / $y = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ con $D_{f+g} = D_f \cap Dg$

Resta de funciones
Se define a la función: $f-g : D \to R$ / $y = (f-g)(x) = f(x)-g(x)$ con $D_{f-g} = D_f \cap Dg$

Producto de funciones
Se define a la función: $f.g : D \to R$ / $y = (f.g)(x) = f(x).g(x)$ con $D_{fg} = D_f \cap Dg$

Cociente de funciones
Se define a la función: $f/g : D \to R$ / $y = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ con $D_{f/g} = D_f \cap Dg - \{x_0\}$

(La función *f/g* está definida en todos los puntos, menos en x_0 en los que *g* se anula.)

Producto de una constante por una función
Se define así, a la función: $kf : D \to R$ / $y = (kf)(x) = k.f(x)$

Actividad 28: Obtener las siguientes funciones:

a) $G(x) = f(x) + 5$ si $f(x)= -4x + 1$

b) $G(x) = f(x) - x$ si $f(x)= x^2 - 4x - 5$

c) $G(x) = f(x) / h(x)$ si $f(x)= x^2 - 4x + 5$ y $h(x) = x+1$

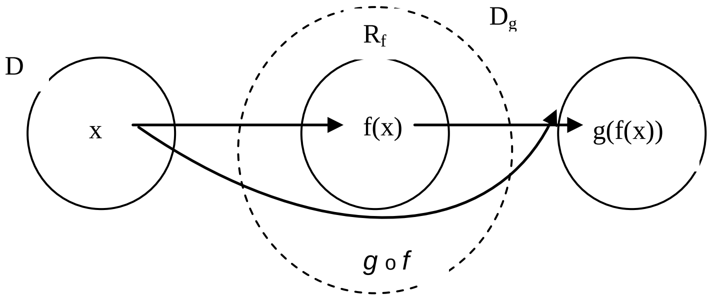
d) $G(x) = f(x) .h (x) - 2$ si $f(x)= -2x + 3$ y $h(x) = x - 1$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, tales que **el recorrido o imagen de *f* esté incluido en el dominio de *g***, se llama *composición de las funciones f* y *g,* y se escribe *g* o *f,* a la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

La función (*g* o *f*)(*x*) se lee « *f* compuesto con *g* aplicado a *x* ».



Para que la composición exista, es necesario que la imagen de la función que se aplica primero esté incluido en el dominio de la segunda función. Si esto no sucede, se pueden realizar restricciones para lograr la composición.
(Generalmente se modifica el dominio y la imagen de la primera función aplicada).

Determinación de la imagen de un elemento mediante una función compuesta

1. Se obtiene la imagen de *x* mediante la función *f*, o sea *f*(*x*).
2. Se calcula la imagen mediante la función *g*, de *f*(*x*). Es decir, se aplica la función *g* al resultado obtenido anteriormente.

Ejemplo: Sean las funciones : $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$. Calcular *g* o *f*

Rta: Como $R_f \subset Dg$, entonces existe $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x+3] = (x+3)^2$

Nota: La composición de funciones **no es conmutativa**. $gof \neq fog$

Actividad 29:

Obtener, si es posible, las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, dadas las funciones:

a) f : x → 2x-1 y g : x → x/3

b) f : x → -2x y g : x → $\frac{x+1}{2}$

c) f : x → x^2 –1 y g : x → $\sqrt{2x}$

5.4 Limite Finito

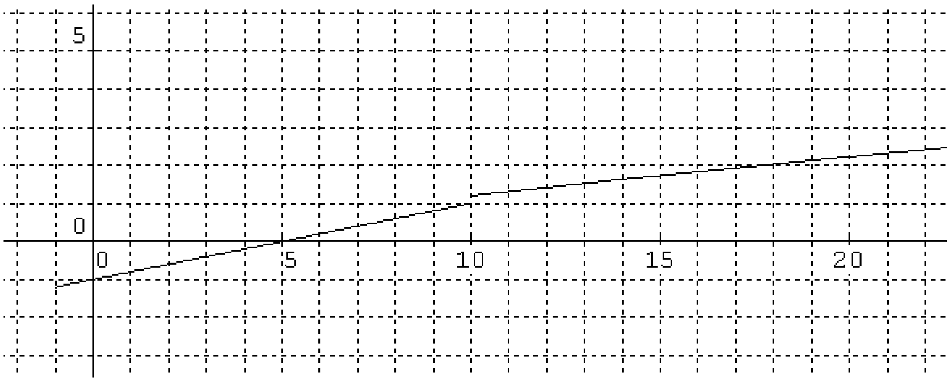
Problema 1:

En cierto grupo de familias, el gasto mensual en ocio, G(x) en miles de pesos, está relacionado con sus ingresos mensuales, x en miles de pesos, a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0.2x - 1 & si \quad 0 \le x \le 10 \\ \dfrac{30x}{2x + 230} & si \quad 10 < x \end{cases}$$

¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son ”ligeramente” inferiores o superiores a los $10.000 ?

Para responder a este interrogante deberiamos analizar **la continuidad** de la gráfica de la funcion G en x= 10:



Analíticamente se puede estudiar el caso calculando: G(10) y el **límite** de **G** cuando **x** se **aproxima a 10 (En símbolos:** $\lim_{x \to 10} G(x)$)

En este caso, si bien G(10) = 1 , sin embargo **no existe el límite finito.**

La noción de límite de una función es fundamental en el estudio del Cálculo**.**

En este parte de la unidad se estudiará esta concepto, sus propiedades y sobre todo se calcularán algunos límites de funciones reales para analizar su continuidad.

Problema 2:

Dada la funcion : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ Esta claro que el Dominio es: D_f =

¿Cuál es el límite de f cuando x se “aproxima” a 1?

Para responder a esta consigna te propongo que consideres un entorno reducido de radio 0,5 y centro 1, y completes la siguiente tabla para valores de x pertenecientes a este entorno:

x	1,89	1,99	1,998	2,005	2,008	2,01
f(x)						

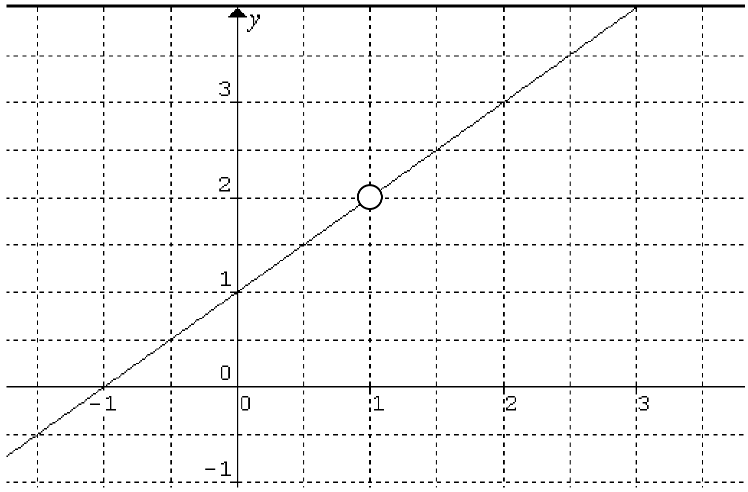
Después de completar la tabla, observa y responde:

a) En la función los valores de x tienden o son próximos a ……. , mientras que los de f(x) son próximos a ……..

b) Los valores de x pertenecen al entorno ………..

Los valores de f(x) pertenecen a un entorno ………..

c) Marca en forma aproximada, los entornos sobre el gráfico de f :



En esta función *f* , si bien $1 \notin D_f$, pero existe **límite finito** cuando x tiende a 1

y se escribe:…. …………….

Límite finito de una Función Real

Sea f : D_f -> *R* / $D_f \subset R$, a punto de acumulación de su dominio y $l \in R$
(a puede o no pertenecer a D_f)

Se dice que el número real *l* es el límite de la función *f* en el punto $\boldsymbol{a}$, cuando los valores de *f(x*) tienden o se aproximan hacia el valor *l* cuanto se quiera*,* eligiendo a x lo suficientemente próximos a $\boldsymbol{a}$, pero distinto de $\boldsymbol{a}$.

El límite de una función en un punto a, si existe, es único y se denota:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

La definición anterior se puede expresar:

Una función *f(x)* tiene por límite *l* en a (punto de acumulación del D_f), cuando para todo entorno de *l* de radio ε , $E_{(l,\ \varepsilon)}$, hay un entorno reducido de a de radio δ, $E'(a, \delta)$, tal que para cualquier *x* de $E'(a, \delta)$, su imagen *f(x)* está en el entorno $E_{(l,\ \varepsilon)}$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x : (x \in D_f \wedge \ 0 < \left| x - a \right| < \delta \ \Rightarrow \ \left| f(x) - l \right| < \varepsilon \ )$$

Ejemplo:

Demostración de: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=9$

Según la definición anterior, para cualquier $\epsilon > 0$ *que nos den, tenemos que encontrar* $\delta > 0$ *tal que* $|(5x-1)-9| < \epsilon$ *siempre que* $0 < |x-2| < \delta$. *Nótese, sin embargo, que*

$$|(5x-1)-9| = |5(x-2)| = 5|x-2|$$

luego la desigualdad

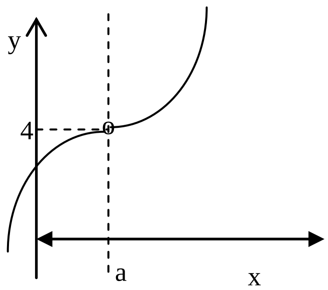
$$|(5x-1)-9| < \epsilon$$

se cumplirá si $0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{5}$. *Por tanto, si nos dan* $\epsilon > 0$ *siempre podemos tomar* $\delta = \frac{\epsilon}{5}$.

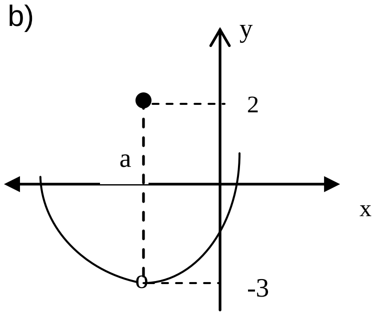
Actividad 1:

Indica aproximadamente cual es el límite para x->a en cada gráfico de las funciones propuestas. En los casos en que no se pueda definir, justificar la respuesta:

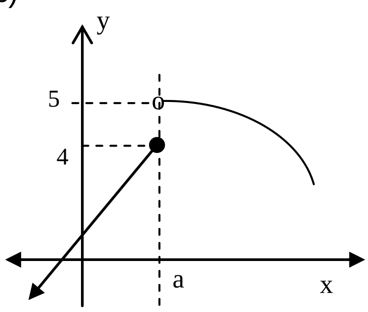
a)



b)



c)



Actividad 2:

En los siguientes ejercicios completar la tabla, observar los resultados y usarlos para estimar el límite pedido. (Ayúdate de una calculadora):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1,80	1,95	1,99	2,01	2,03	2,05
f (x)						

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	-0,1	-0,02	-0,01	0,01	0,02	0,1
f (x)						

El cálculo de límites se determinó por aproximación mediante la ayuda de tablas o por observación de la gráfica.
Pero esta evaluación no siempre es suficiente o posible en la práctica.
Para ello existe un cálculo analítico del límite de funciones que se realiza con la ayuda de propiedades.

Propiedades de los límites:

Sean f y g dos funciones tales que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

Límite de una suma de funciones: Es igual a la suma de los límites de cada una de ellas:

$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A + B$

Límite de una resta de funciones: Es igual a la diferencia de los límites de cada una de ellas:

$\lim\limits_{x \to x_0} (f-g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A - B$

Límite de un producto de funciones: Es igual al producto de los límites de cada una de ellas:

$\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

Límite de un cociente de funciones

Es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el denominador no es nulo:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{(siempre que } B \neq 0\text{)}$$

Límite de una función potencial exponencial:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = A^B$$

Algunos límites básicos:

Sean a y b números reales cualesquiera y n un entero positivo. Entonces:

$i)\ \lim\limits_{x \to a} b = b$ $ii)\ \lim\limits_{x \to a} x = a$ $iii)\ \lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

Actividad 3:

Completa, aplicando las propiedades y los límites básicos:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 9 =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (3 + x) =$

c) $\lim\limits_{x \to -2} 3.(x + x^4) =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4}{x + 4} =$

Actividad 4:

Representa la función g y calcula el límite para x –> 1 de la función g que se define:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Actividad 5:

Sea x_0 un p.ac. del D_f y D_g , calcular aplicando propiedades si: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \dfrac{3}{2}$

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[3f(x) + g(x)\right]$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot 2g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[g(x)^{f(x)}\right]$

Límites laterales:

Sea ***f*** una función real y $\mathbf{x_0}$ un p.ac. de su Dominio.

El limite por la derecha de la función *f* es el número L' cuando *f(x)* se aproxima a L' para x muy próximos x_0 y mayores que x_0 . Esto es si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces $|f(x) - L'| < \varepsilon$

Para expresar el límite por la derecha se escribe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

El limite por la izquierda de la función *f* es el número L'' , cuando *f(x)* se aproxima a L'' para x muy próximos x_0 y menores que x_0 . Esto es si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces $|f(x) - L'| < \varepsilon$

Para expresar el límite por la izquierda se escribe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Relación entre el límite y los límites laterales

El limite de una función *f* en un punto x_0 **existe,** si y solo si existen los límites laterales y coinciden:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Actividad 6:

Calcular los límites laterales de *f* cuando x -> 1 en las siguientes funciones:

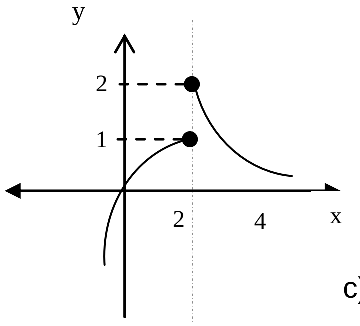
a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x<1 \\ x^2-1 & si \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 1 \\ x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$

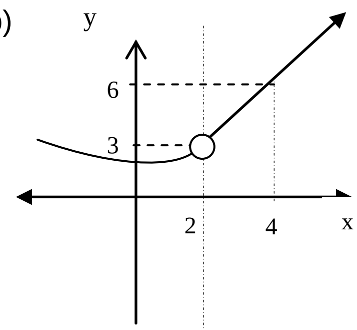
Actividad 7:

Evaluar los límites laterales de *f* cuando x -> 2 en las siguientes funciones:

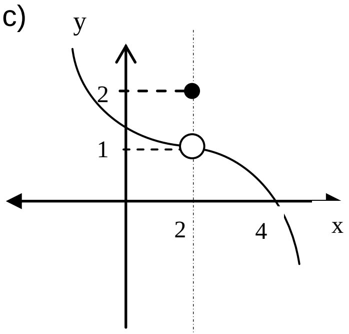
a)



b)

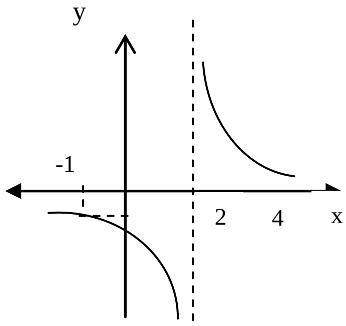


c)



Límites infinitos:

Sea la función: $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ cuya gráfica es la siguiente:



Se puede observar que *f decrece sin cota* cuando x ->2 por la izqu. Y *crece sin cota* cuando x tiende a 2 por der. Este comportamiento se denota:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$

Definición:

Cuando al aproximarse a un punto **a** la función f crece (o decrece) indefinidamente se dice que *f(x)* tiene un **límite infinito** cuando x tiende al punto **a** y se escribe:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\quad y \quad$ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ respectivamente. Es decir:

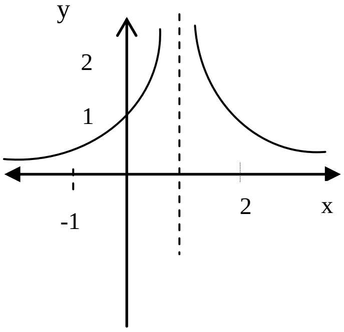
* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

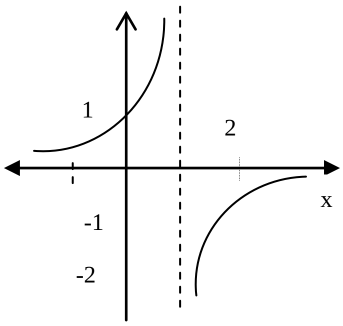
Nota: En esos casos la recta **x = a** es **una asíntota vertical** de la función *f*. Por Ej: x =2

Actividad 10:

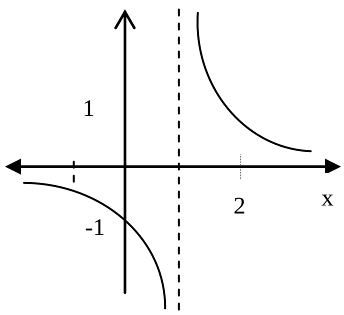
Determina el límite de las siguientes funciones cuando x tiende al número que no pertenece al dominio por izquierda y por derecha:



$a)\, f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$



$b)\, g(x) = \dfrac{-1}{x-1}$



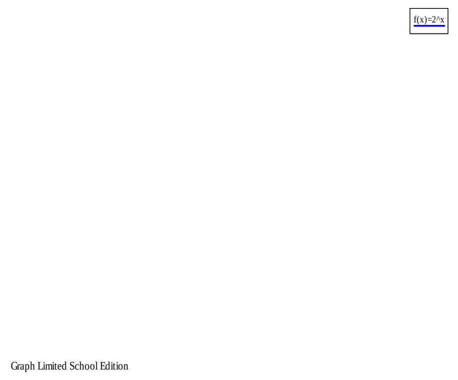
$c) h(x) = \dfrac{1}{(x-1)}$

Actividad 11:

Representa una función f que cumpla simultáneamente con las siguientes condiciones:

$\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, tenga asíntota horizontal en y = 2 , f (4) =0 , f (1) = 0 , f (0) = 1

Ahora si x tiende al infinito en una función, se pueden presentar más de una situación. Observemos los siguientes ejemplos:



En la primera : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ mientras que en la segunda $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

En esta última función la recta y = 0 representa una **asíntota horizontal** de la función g
Por esta razón estudiaremos el límite en el infinito para ese tipo de funciones.

En **Interés compuesto** se define capitalización como el período que en el que se hace efectivo el pago de los intereses ganados en una operación financiera.
Supongamos se deposita un capital inicial C_0 a una tasa anual del 100% durante un año. El monto será :

$$\mathbf{C_n = C_0 .(1+i)^n} \quad \text{(ver Trabajo Práctico Nº2)}$$

Si la capitalización es anual, se capitaliza una vez por año, entonces: i=1 y n=1

$$C_1 = C_0 .(1+1) = 2C_0$$

Si la capitalización es semestral, se capitaliza dos veces por año, entonces: i= ½ y n = 2

$$C_2 = C_0 .(1+ ½).(1+ ½) = C_0 .(1+ ½)^2$$

Supongase que se tiene un capital inicial C_0 = $100 . Calculese cuanto se cobrará al cabo de un año si se capitaliza:

a) semestralmente
b) trimestralmente
c) bimestralmente
d) semanalmente

En general si el interés se capitaliza n veces por año, resulta: $C_n = C_0 . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Si el interés se capitaliza a cada **instante** , el año debe ser dividido en una cantidad n infinita de períodos, y el monto resulta de calcular el siguiente **límite**:

$$C_n = \lim_{n \to \infty} C_0 . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Observesé que para calcular el límite de esta expresión se requieren de otros procedimientos adicionales que un simple reeemplazo.
(Texto extraido del Libro: Matemática instrumental I – Activa. Ed. Puerto de Palos)

Límites en el infinito:

Son los límites: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, que los definimos de la forma siguiente:

* Sea f definida en un conjunto no acotado superiormente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \forall x:(x\in D_f \wedge x>\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$$

* Sea f definida en un conjunto no acotado inferiormente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \forall x:(x\in D_f \wedge x<-\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$$

Las operaciones y propiedades de los límites **se generalizan** para límites infinitos y en el Infinito teniendo en cuenta que: *si L es el límite de una función real, entonces el límite de*:

La suma: $\infty \pm L = \infty$; $\infty + \infty = \infty$; $-\infty + L = -\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$

El producto: $L.(\pm\infty) = \pm\infty$ si $L>0$; $\infty.(\pm\infty) = \pm\infty$;

$L.(-\infty) = +\infty$ y $L.(+\infty) = -\infty$ si $L<0$

Cociente:

$$\frac{L}{\infty}=0 \quad (\textit{En particular } \frac{0}{\infty}=0)$$

$$\frac{+\infty}{L}=\pm\infty \quad (Si \ L>0) \qquad y \qquad \frac{+\infty}{L}=-\infty \quad (Si \ L<0) \qquad (\textit{En particular } \frac{\infty}{0}=\infty)$$

$$\frac{L}{0}=\pm\infty \quad (Si \ L\neq 0)$$

Aplicación del cálculo de límites para la determinación de las asíntotas

Recordemos: las asíntotas son rectas hacia las cuales tiende a pegarse la gráfica de una función. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas, como se pude apreciar en los sigu.

La recta **x = a** es una asíntota vertical de la curva y = f(x) si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

La recta **y = b** es una asíntota horizontal de la curva y = f(x) si $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$

La recta **y = mx + b** es una asíntota oblicua de la curva y = f(x) si $\lim_{x\to\infty} [f(x)-(mx+b)]=0$

Actividad 12:

De acuerdo a lo visto, evaluar los siguientes límites :

$i)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{x+2} =$ ii) $\lim_{x\to 3} \frac{-6}{x^2-9} =$

Actividad 13:

Obtener las asíntotas de las siguientes funciones, aplicando límite:

i) $f(x) = \frac{6}{x+2}$ ii) $g(x) = 2^{\,x+1}$ iii) $t(x) = 2 + \frac{3}{x-4}$

Se vio que en algunas funciones se pude obtener el límite por sustitución directa de x por la tendencia, pero existen otros casos que esta forma no permite conocer la existencia y el valor del límite.

Por ejemplo:

$1)\ \lim_{x\to-2} \frac{x^2+2x}{x+2} = \frac{0}{0}$ $2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+4}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty}$

Estos casos y otros reciben el nombre de límites indeterminados:

Límites indeterminados

Son formas indeterminadas las expresiones:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

Para eliminar estas forma se debe llevar la función dada a otra equivalente aplicando propiedades y algunos artificios algebraicos según sea el caso. Veamos los casos cuando las funciones son **racionales:**

Caso $\frac{0}{0}$ se aplica factorización en numerador y denominador, y se simplifica los factores.

Caso $\frac{\infty}{\infty}$ se divide el denominador entre la indeterminada de mayor grado de ambas.

Ejemplo : Calcular el límite de g(x)

$$g(x) = \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10},\ \text{cuando } x \to 2.$$

Respuesta: Si aplicamos propiedades el límite da 0/0 , como se observa:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^3-2x^2-6x+12)}{\lim_{x\to 2}(x^2+3x-10)} = \frac{2^3-2\cdot 2^2-6\cdot 2+12}{2^2+3\cdot 2-10} = \frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando, resulta:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,(x^2-6)}{(x-2)\,(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-6)}{(x+5)} = \frac{-2}{7}$$

Actividad 14:

Eliminar la indeterminada de los siguientes límites propuestos cuando son racionales (0 / 0):

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2+x}{x^2+2x} =$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x+2x-3} =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{27-(3+x)^3}{4x} =$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{4+x^2+5x} =$

Actividad 15:

Calcular los siguientes límites propuestos cuando son irracionales cuadráticos (0 / 0):

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} =$ ii) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^3-64} =$

Actividad 16:

Evaluar los siguientes límites. En el caso de que dé indeterminado, eliminarlo:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{x^2+1} =$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5} =$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1} =$

Caso : 1^∞

Existen los llamados **límites notables** cuando se presenta la forma indeterminada: 1^∞
Para eliminar dicha indeterminación aplicamos:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

Actividad 17:

Obtener los siguientes límites notables:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{2}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{6x}\right)^{x2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{3}{5x}}$ d) $\lim\limits_{y\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{y^3}\right)^{2y}$

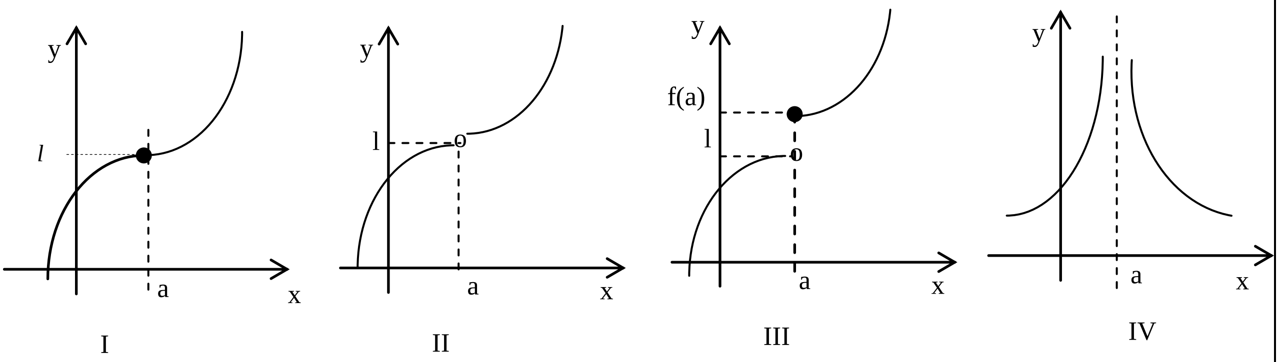
Actividad 18:

En la página 1 se presentó la expresión de la fórmula del cálculo del Capital

$C_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_0 . \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ .Aplica el limite notable y obtiene el límite.

5.5 Funciones Contínuas

Se dice que una función *f* es continua en un punto x = a, si su gráfica no presenta ninguna Interrupción o salto en el punto a, es decir, si es posible recorrer la gráfica de *f* sin levantar el lápiz del papel.
En las gráficas siguientes se presentan cuatro situaciones al menos para una función *f* en un punto **a**.



<u>Caso I</u>: La función **está definida** en x = a , y **existe** el límite finito *l* de f cuando x->a .
($\lim_{x \to a} f(x) = l = f(a)$) La función f se dice que es *contínua en a.*

<u>Caso II</u>: La función no está definida en x = a. Pero existe el límite finito de f cuando x->a
($\lim_{x \to a} f(x) = l$). La función es *discontínua en a.*

<u>Caso III</u>: La función está definida en x = a. Pero no existe el límite de f cuando x->a .
($\lim_{x \to a^-} f(x) = l' \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$). La función es *discontínua en a*

<u>Caso IV</u>: La función no está definida en x = a , y no existe el límite de f cuando x->a .
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. La función es *discontínua en a.*

Las consideraciones anteriores nos lleva a la siguiente:

<u>Definición</u>:

Una función ***f es continua*** en el punto x = a (p. ac. del dominio de *f*), si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. *f* está definida en x = a. (o sea, $a \in D_f$)
2. Existe límite finito. $\lim_{x \to a} f(x) = l$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = l = f(a)$

Si alguna de las tres condiciones no se cumple, la función es *discontinua* .

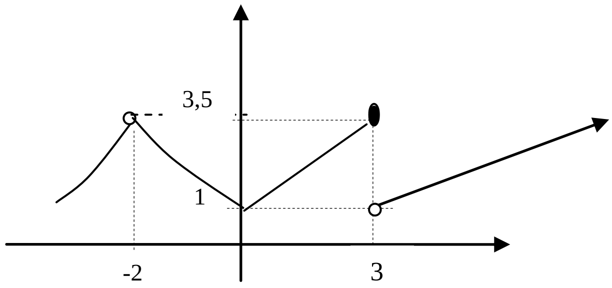
<u>Tipos de discontinuidades:</u>

i- *f* es **discontinua evitable** si f es discontinua en x = a, pero **existe límite finito** cuando x->a.
Ej. Caso II

ii- *f* es **discontinua esencial** si **no existe el límite finito** cuando x->a. **(**Como en III y IV)

Actividad 19:

En el siguiente gráfico analiza la continuidad de la función en –2 , 0 y 3.



Actividad 20:

Analiza si las siguientes funciones son continuas o no en x_0 :

a) $f : x \rightarrow \begin{cases} x+3 & si \quad x \geq 2 \\ x^2+1 & si \quad x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

b) $f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

Actividad 21:

Calcula el valor que debe de tener k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f : x \rightarrow \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 2 \\ k-x & si \quad x > 2 \end{cases}$

b) $g : x \rightarrow \begin{cases} x+k & \quad x \leq 0 \\ x^2-1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Actividad 22:

Grafica la función, f en forma aproximada, que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $f(-3) = 0$ b) $f(0) = 2$ c) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

e) sea discontinua evitable en -1 y *f*(x) = 2 en [-1, 0]

ALGEBRA DE FUNCIONES CONTINUAS

Sean f: D -> R / D $\subset$ R y g: D -> R / D $\subset$ R dos funciones continuas en un punto a $\in$ D.

Entonces:

1- $f \pm g$ es contínua en a.

2- $f \,.\, g$ es contínua en a.

3- $\frac{f}{g}$ es contínua en a , si g(a)> 0.

4- $f^{\,g}$ es contínua en a , si $f(a)>0$

***Nota**: para demostrar estas propiedades es suficiente aplicar el álgebra de límites*.

Composición de funciones continuas

Si f es una función continua en a y g es otra función continua en $f(a)$, la función compuesta gof es contínua en a .

CONTINUIDAD DE ALGUNAS FUNCIONES:

Función polinómica

La función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ es contínua en todos los puntos, por ser suma de funciones continuas .

Función racional

La función f(x) = P(x)/ Q(x) es contínua, salvo en los puntos en los que el denominados se anula, por ser un cociente de dos funciones continuas.

Función exponencial

La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua en todos los puntos.

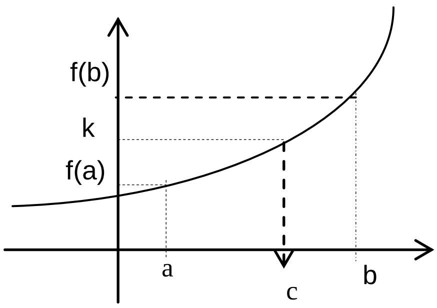
Función logarítmica

La función $f(x) = log_a x$, siendo $a > 1$, es continua en todos los puntos de su campo de existencia $(0, +\infty)$.

TEOREMAS DE FUNCIONES CONTINUAS

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es una función continua en [a, b], f(a) < f(b) y k un número entre f(a) y f(b) (se puede suponer f(a)< f(b)), entonces existe c $\in$ (a, b) / f(c) = k



TEOREMA DE BOLZANO

Si f es continua en [a, b] y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe c$\in$ (a, b) / f(c) = 0

Nota: este teorema es un caso particular del teorema del valor intermedio con k = 0

TEOREMAS DE WEIERSTRASS

1) Si f es continua en [a, b], entonces f está acotada en [a, b]

2) Si f es continua en [a, b], entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto en [a, b].

Nota: entiéndase máximo y mínimo de f en [a, b], como el mayor y el menor valor que toma la Función f en ese intervalo respectivamente.

Actividad 23:

En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en diversión, G(x) en miles de pesetas, está relacionado con sus ingresos mensuales, x en miles de pesetas, a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0.02x - 1 & si \quad 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{30x}{2x+2300} & si \quad 100 < x \end{cases}$$

Estudiar la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en diversión de una familia es sensiblemente Distinto si sus ingresos son ”ligeramente” inferiores o superiores a las 100.000 ptas?

Actividad 24:

Representa a las siguientes funciones y analiza la continuidad .

En el caso de que sean discontinuas, clasificarlas y redefinirlas si son evitables.

a) $f : x \to \begin{cases} x-3 & si \quad x > 2 \\ 3-2x & si \quad x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

b) $f : x \to \begin{cases} -1 & para \quad x < 0 \\ x-1 & para \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & para \quad x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 1$

b) $f : x \to \begin{cases} 4-x & si \quad x > 3 \\ x-2 & si \quad 0 < x < 3 \\ x-1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 3$

Actividad 25:

En la actividad anterior aplica el teorema del valor intermedio en los casos que sea posible

ANEXO : Sistema de los Números reales

Axiomas de completitud:

Para entender cuando **un conjunto se dice acotado**, veamos los siguientes conceptos previos

Sea A un subconjunto no vacío de números reales; $A \subset R$. y $a \in A$

- A es un conjunto **acotado superiormente** si y solo si existe un número real **c** que es mayor o igual que los números de A. O sea: $\forall$ **a** $\in$ **A: c** $\geq$ **a**.
  (**c** recibe el nombre de **cota superior)**
  A la menor de las cotas superiores se la llama **supremo** de A.
  Si el supremo pertenece al conjunto A se lo llama **máximo**.

- Diremos que A está **acotado inferiormente** si y sólo si existe un número real **c** que es menor o igual que los números de A. O sea : $\forall$ **a** $\in$ **A: c** $\leq$ **a**
  (c se llama **Cota Inferior** de A).

  La mayor de las cotas inferiores se denomina **ínfimo** de A.
  Si el ínfimo pertenece al conjunto A se denomina **mínimo**.

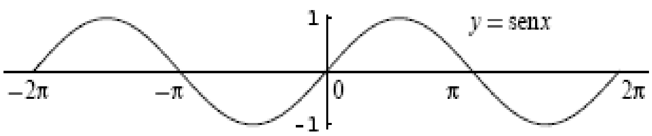
<u>Conclusión</u>: Un conjunto se dice **acotado** cuando esta acotado **inferior y superiormente.**

<u>Funciones trigonométricas</u>: Son seis. Las ubicamos a continuación junto a sus recíprocas:

seno: $f(x) = sen\ x$; coseno: $f(x) = \cos\ x$,
tangente: $f(x) = tg\ x$; cotangente: $f(x) = ctg\ x$,
secante: $f(x) = \sec x$; cosecante: $f(x) = \mathrm{cos}ec\ x$

Ejemplos:

Función seno



Función coseno

Ejercicios Complementarios

Parte A : NÚMEROS REALES- FUNCIONES

1) Escribe como intervalo los siguientes conjuntos. Indica cual no esta acotado . Luego representar en la recta:

a) A = { $x \in R$ / $-4 < x \leq -2$ }

b) A = { $x \in R$ / $x > 6$ v $x < -6$ }

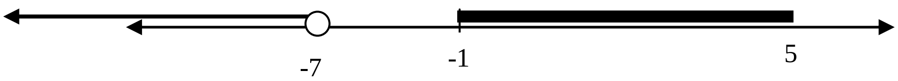
c) A = { $x \in R$ / $-4 < 3 - x$ }

d) A = { $x \in R$ / $-1 < x+1 < 5$ }

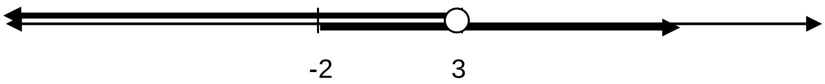
e) A = { $x \in R$ / $-2 \leq 2x \leq 6$, }

2) Escribe el conjunto solución indicado por el gráfico:

a)



b)



3) El presupuesto de una reparación es de $ 750 con un error posible del 12%
¿Entre que valores puede estar comprendida esa reparación? .

4) Obtenga y grafique el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

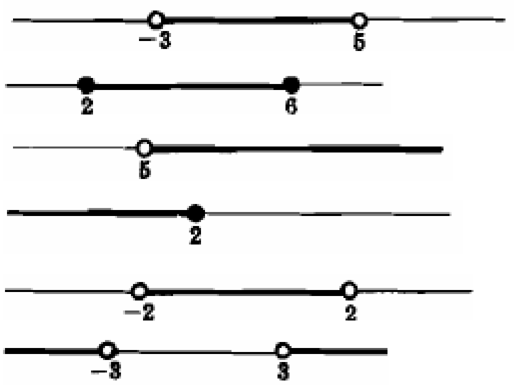
a) $(x + 6).(2x - 1) < 0$ b) $\frac{-t+1}{t-3} \leq 0$ c) $2x + 1 > 4x - 3 > 4x - 7$

5) Encontrar y representar los valores de "x" que verifiquen las siguientes:

a) $|3x - 2| = 13$ b) $10 > |x|$ c) $x^2 \leq 25$

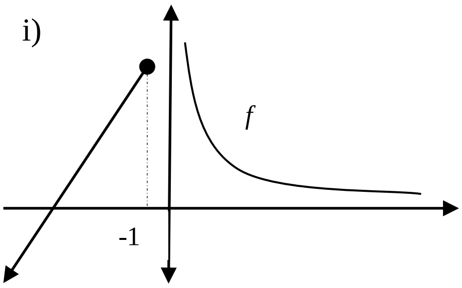
d) $|-x + 4| \geq 7$ e) $(4 - x)^2 \leq 49$

6) Representa una función que cumpla con las condiciones de a < b, f(a)<0 y f(b)>0

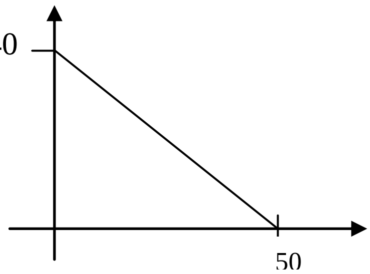


7) Determinar el Dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

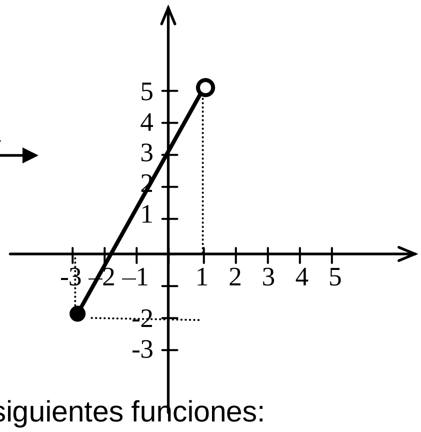
i)



ii)



iii)



8) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\left(|x+3| - 4\right)$

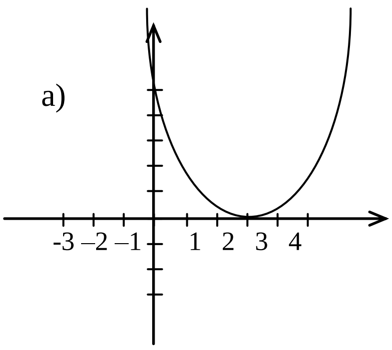
b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

c) $f(x) = \sqrt{-(x+5).(2x-4)}$

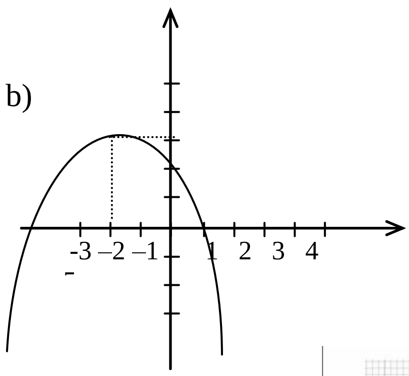
d) $f(x) = \sqrt[4]{(3x-6)(x+2)}$

9) Escribe la regla de correspondencia de cada una a partir de traslaciones de la función $y=x^2$:

a)



b)

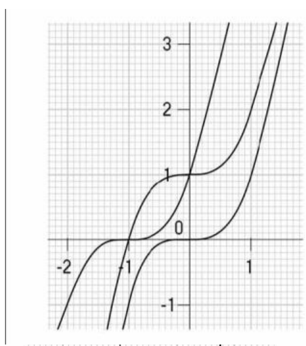


10) En el gráfico 1 se representan:

$f(x) = x^3$

$g(x) = x^3 + 1$

$t(x) =$

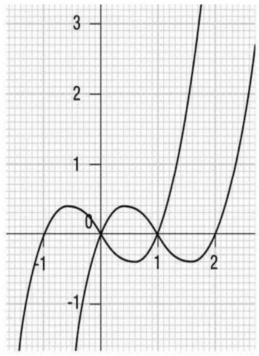


Indiquen cuál es la fórmula de la función t y los gráficos correspondiente a cada función.
(Expresados como resultado de aplicar traslaciones).

En el gráfico 2 se representan las funciones:

$f(x) = x^3 - x$ y $g(x)$

Expresen una fórmula para g(x), observando que su gráfico es una traslación del gráfico de f.



11) Determinar: dominio y recorrido, intersección con los ejes.
Existencia de asíntotas. Graficar.

$a)\ y = 2x^2 - 3x$ $\quad b)\ y = -3x^2 + 5x - 2$

$c)\ y = x^3 - x^2 + 4x - 4$ $\quad d)\ y = \sqrt[3]{x}$

$e)\ y = -\sqrt{-x+1}$ $\quad f)\ y = \dfrac{x+2}{x-2}$ $\quad g)\ y = x + \dfrac{1}{x}$

$h)\ y = \dfrac{1}{x-5} + 1$ $\quad i)\ y = e^{x}$ $\quad j)\ y = e^{-x}$ $\quad k)\ y = \log\ x^2$

12) Representa y clasifica a las siguientes funciones en pares o impares:

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ b) $h: x \to \begin{cases} x+4 & si \quad x < -2 \\ x & si \quad -2 \le x \le 2 \\ x-4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ c) $t: x \to \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & si \quad x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

d) $f: x \to \begin{cases} x^2 & si \quad |x| \le 2 \\ 4 & si \quad |x| > 2 \end{cases}$ e) $k: x \to \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad x \ge 0 \\ -\sqrt{-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$

13) Sean las funciones: $f(x) = 3x^3 + 7$ y $g(x) = x^2 - 1$.
Halla la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones.

14) Con las siguientes funciones, efectúa la operación que se indica y determina el Dominio de la función obtenida:

$f_1: x \to 3x - 5$, $f_2: x \to x^2 - 4$, $f_3: x \to \dfrac{2}{x}$ $f_4: x \to \sqrt{x-1}$

a) $f_1 + f_2$ b) $f_3 - f_2$

c) $f_2 : f_3$ d) f_4^2

e) f_1 / f_4 f) $f_3 . f_4$

15) Determinar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones:
y = - x +1 y *y =* x^2 *+1*

16) Dadas las funciones reales f y g definidas por f (x) = 3x –6 y g(x) = x^2 – 4
¿Cuál/es es/son el/los valor/es de **a** que verifica f(**a**) = g(**a**) ?

17) Siendo $f: R \to R \ / \ f(x) = -x^2 - 2x + 1$, Calcular:

a) f (-2) b) f(1/2) – f (0) c) f (-1).f (2) d) f (x +h)

18) Hallar, si existen, $f \circ g \ \wedge \ g \circ f$:

a) $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = 3x + 2$ $\quad g : \mathbb{N} \to \Re \,/\, g(x) = x^3 - 1$

b) $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g : \Re \to \Re \,/\, g(x) = x - 6$

c) $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = (x + 1)^2$ $\quad g : \Re \to \Re \,/\, g(x) = x^3 + x^2$

19) Sean $f(x) = 2x - 3$ *y* $g(x) = x^2 + 1$, halla:

i) $f(g(x)) =$ $\quad$ iii) $f(g(2)) =$

ii) $g(f(x)) =$ $\quad$ iv) $g(f(-1)) =$

20) Dada la función compuesta $t(x) = \cos^4 (3x+5)$, indica cuantas funciones intervienen en la composición y expresa la misma en forma simbólica.

21) Una planta siderúrgica produce x y y cantidades de aceros de dos tipos diferentes con los mismos recursos. La ecuación de transformación es:

$$y = 20 - \frac{300}{30 - x} \qquad con \quad x \leq 15$$

a) Grafique
b) Cuales son las cantidades máximas de cada uno que pueden producirse.
c) Si la demanda de x es el doble de la de y , que cantidades deben producirse.

22) Para niveles de producción inferiores a las 1.000 unidades semanales, la función costos de una compañía es C(x) = 5000 + 8 x, donde x es el número de unidades. Si se quiere producir una mayor cantidad, se debe abrir una nueva línea de montaje y la función costos cambia a C(x) = 9000 + 6 x.

Si las unidades se venden a $ 16 cada una, construya la función utilidades de la firma.

Parte B: LIMITES- CONTINUIDAD

1) Probar aplicando la definición de límite finito:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-1) = 3$ *b)* $\lim\limits_{x\to -1} (8x+4) = -4$

2) Sí $f(x) = x^2 - 3$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$ Obtener aplicando propiedades:

i) $\lim\limits_{x\to 2}(f.g)(x) =$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)^{g(x)} =$

3) Dada la función $f(x) = x + 3$. Calcular el límite

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left[f(x) - f(x+2) \right] =$ b) $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h) =$

4) Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -2$. Calcular aplicando propiedades:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x) \right]$ *b)* $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot 2g(x) \right]$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)} \right]$ *d)* $\lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x)^{f(x)} \right]$

e) $\lim\limits_{x\to x_0} \ln \left[f(x) - g(x) \right]$ *f)* $\lim\limits_{x\to x_0} \left[e^{g(x)} \right]$

5) Calcular los límites laterales de f cuando x → 0 en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad x>0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x\le 0 \\ x^2-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

6) Encuentre los siguientes límites aplicando propiedades:

a) $\lim\limits_{t\to 2} \left(t^2 + 6t + 5 \right)$ b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3t-5}{t+2}$ c) $\lim\limits_{t\to 4} \sqrt{t^2+1}$

7) Eliminar la indeterminada de los siguientes límites propuestos (0 / 0):

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^3 - 27}{x} =$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{4x+x^2+3} =$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} =$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} =$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} =$ j) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

8) Calcule los siguientes límites laterales:

a) $\lim\limits_{t \to 1^+} \sqrt{t-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$ cuando x→0

9) Evaluar los siguientes límites. En el caso de que dé indeterminado, eliminarlo:

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5} =$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1} =$

10) Encuéntrese los límites indicados, en los casos que sea posible:

i) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq -1 \\ 3 & si \quad x > -1 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ x & si \quad x > 1 \end{cases}$

i)
a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$
b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

ii)
a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$
c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$

11) Obtener los siguientes límites notables:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 4x}{x}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x^2}$ $c)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 4x}{6x}$

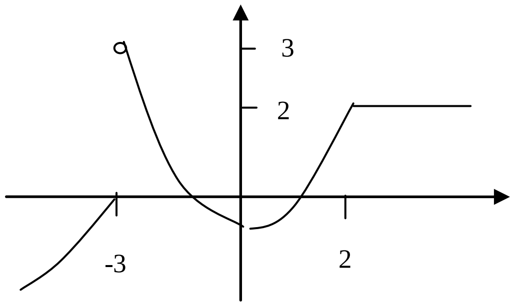
d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{5}{4x}}$

12) Grafica la función ,en forma aproximada , f : D_f → R / $D_f \subset$ R
que cumpla con las siguientes condiciones:

a) f(-3) = 0 b) f(0) = 1 c) f (2) = 0 d) f (x) = -1 , $\forall$ x $\in$ (2, +∞)

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

13) Dada la gráfica de la función g , decide si las siguientes afirmaciones son V o F. Justifica:



a) $\lim_{x\to -3^+} g(x)=3$

b) $\lim_{x\to 2^+} g(x)=+\infty$

c) $\lim_{x\to -3^-} g(x)=3$

d) g es discontínua en -4

14) Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1}$

$b)\ \lim_{t\to 0} \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$c)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

$d)\ \lim_{x\to\infty} \frac{7-2x-x^4}{9-3x^4+2x^2}$

$e)\ \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h}$

$f)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

$g)\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

$h)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-1}$

$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$

$j)\ \lim_{x\to -1} (x+2)^{\frac{2}{x+1}}$

$k)\ \lim_{x\to 0} \left(1-\frac{3x}{2}\right)^{2/5x}$

$l)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^x$

$m)\ \lim_{t\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

p) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

q) $\lim_{x\to -2} \frac{-x^2-5x-6}{x^2-6-x} =$

r) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} =$

s) $\lim_{x\to 7^-} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}} =$

t) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-8}{\sqrt{x^2-5}} =$

15) Utilizando la definición de continuidad demuestre que la función g(x) = x +3 es contínua en x = 5

16) Analiza si la siguiente función es continuas o no en x_0 :

$$f : x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$ en $x_0 = 0$

17) Representa a las siguientes funciones y analiza la continuidad .
En el caso de que sean discontinuas, clasificarlas y redefinirlas si son evitables.

a) $f : x \to \begin{cases} 4 - x & si \quad x < 2 \\ 2x - 2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

b) $f : x \to \begin{cases} -x - 1 & para \quad x < -1 \\ 0 & para \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & para \quad x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = -1$ y en $x_1 = 1$

c) $f : x \to \begin{cases} 4 - x & si \quad x > 3 \\ x - 2 & si \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 3$

d) $f : x \to \begin{cases} x + 3 & si \quad x \geq 2 \\ x^2 + 1 & si \quad x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

e) $f : x \to \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + 1 & si \quad x > 2 \\ 8 & si \quad x = 2 \\ x & si \quad x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

18) Determine si la función es contínua en los puntos dados. Si es discontínua evitable redefinir la función :

a) $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ en 1 y 0 a) $g(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 - 9}$ en 3 y -3

19) Encuéntrese los puntos de discontinuidad , si es que existen, para cada función:

a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & si \quad x > -2 \\ 3x + 6 & si \quad x < -2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3} & si \quad x \neq 3 \\ 0 & si \quad x = 3 \end{cases}$

20) Encuéntrese el valor de k , de modo que *f* sea contínua en x =1 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \neq 1 \\ k & si \quad x = 1 \end{cases}$$

21) Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene alguna solución entre 1 y 2.
(aplicar teorema de Bolzano)

22) El monto total S de un capital de P pesos que se invierte en t años a una tasa anual i está dado por la fórmula:

$S = P.\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{n.t}$ donde ***n*** representa la veces que se capitaliza ***i*** en un año.

a) Demostrar que si n → ∞ , esta fórmula se transforma en : S = P.e ^{nt} , es decir, el interés se capitaliza continuamente.

b) Si son invertidos $100 a una tasa anual del 5% capitalizado continuamente, encuentre el monto total al final de 1 año

23) Si se invierte un capital de $ 1.000 y considerando que el interés se capitaliza n veces al año a una tasa del 8% anual. El capital actual responde a la fórmula:

$$S = 1000\left(1 + \frac{0{,}08}{n}\right)^{n\,t}$$

Calcular el monto acumulado en t años, si el interés se capitaliza continuamente. (considere $\Delta t \to 0 \Rightarrow n \to \infty$)

Cuestiones tipo test

Para cada una de las siguientes cuestiones encuentra la respuesta correcta (sólo hay una):

1. Para asegurarnos que una función es continua en un punto $\mathbf{x=a}$ basta con comprobar que

a) $x=a$ pertenece al dominio de la función.

b) existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

c) $x=a$ pertenece al dominio de la función y se cumple $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

d) ninguna de las respuestas anteriores es la correcta.

2. Para asegurarnos que el límite de una función existe en un punto $\mathbf{x=a}$ basta con comprobar que

a) los límites laterales en $x=a$ existen y son iguales.

b) los límites laterales existen.

c) los límites laterales son $\pm\infty$.

d) ninguna de las respuestas anteriores es la correcta.

3. Los lugares candidatos en los que se encuentran asíntotas verticales son

a) solamente los x que no pertenecen al dominio.

b) solamente los x en los que los límites laterales no coinciden.

c) solamente los x en los que los límites laterales tienden a $+\infty$ ó $-\infty$.

d) ninguna de las respuestas anteriores es la correcta.

4. Un ejemplo de función con discontinuidad evitable sería

a) $f(x)=tg(x)$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

5. Una función polinómica es siempre continua.

a) Verdadero

b) Falso, porque si su denominador se anula no será continua en tales puntos.

c) Falso, por ejemplo x^2+1 no tiene raíces reales, así que no es continua.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es la correcta.