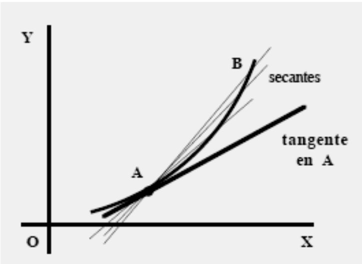
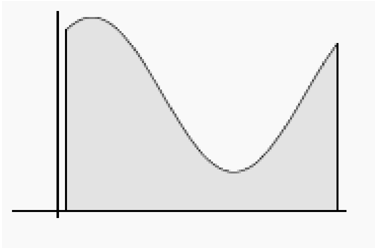
Guía de trabajos Teórico- Práctico Nº 6

" LOS DOS PROBLEMAS DEL CÁLCULO "





UNIDAD VI:

6.1 Derivada de una Función. Tasa de cambio. Derivada de una Función en un punto: definición. Interpretación geométrica.

6.2. Algebra de derivadas: demostraciones. Derivada de funciones compuestas. Aplicación: Análisis marginal. Derivadas sucesivas.

6.3. Derivabilidad y continuidad. Teorema del Valor medio. Diferencial de una función. Tabla de derivadas

7.1. Antiderivada. Primitivas. Integral indefinida. Propiedades. Integraciones inmediatas. Tabla de integrales

7.2. Método de integración: sustitución y por partes.

7.3. Integral definida. Integral de Riemman. Propiedades.

7.4. Teorema del valor medio de integrales. Teorema fundamental del Cálculo integral: demostración. Regla de Barrow: segundo teorema del cálculo integral. Área bajo la curva.

7.5. Ejercicios Complementarios.

6.1: Derivada de una función

Muchas leyes de la Física, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" *y* con otra variable "independiente" *x*, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente *cambia* de un valor inicial x_1 a otro x_2 , la variable *y* lo hace de $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Existe una relación entre estos *cambios*. Veamos el siguiente problema:

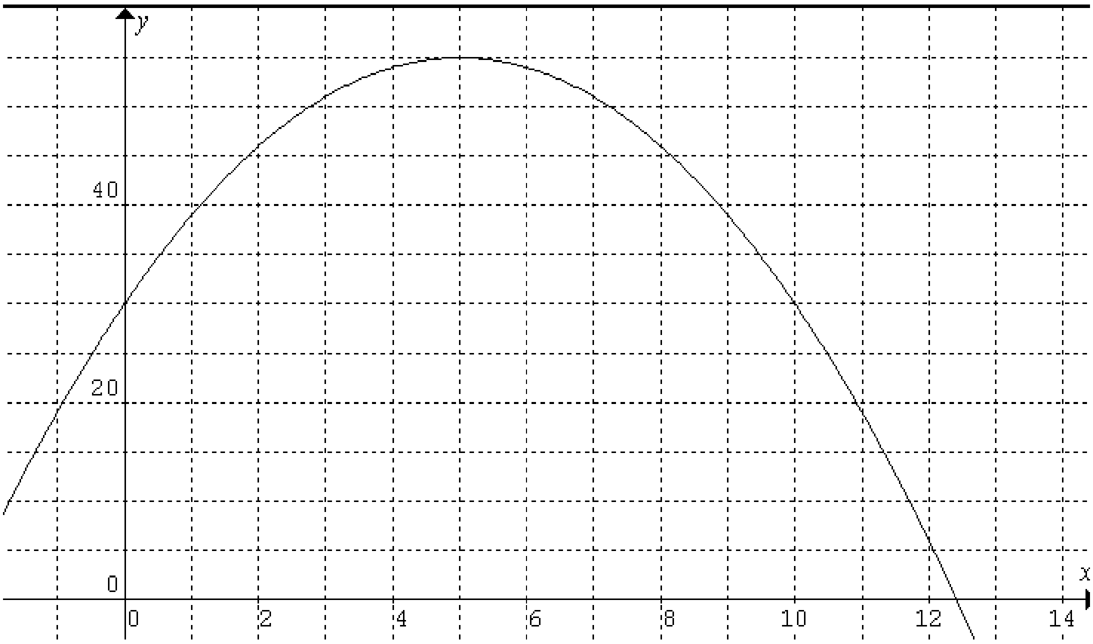
Problema:

Las pérdidas en millones de dolares del Banco Thomson(debido a los malos prestamos otorgados en agricultura, inmuebles y compras de autos) se estiman mediante:

$A = f(t) = -t^2 + 10\,t + 30$ $\quad (0 \leq t \leq 10)$ Donde t , es tiempo en años

(t = 0 corresponde al inicio de 1994)

A un incremento de la variable t le corresponderá una variacion de *f* , como se observa en la gráfica siguiente:



Responde:

a)¿Cuál es la pérdida promedio que se obtuvo entre 1995 y 1999?

b) ¿Con qué rapidez se incrementan las pérdidas al inicio de 1997?

Y ¿Al inicio del 2000?

Para responder estas cuestiones presentemos dos definiciones:

Razon de cambio o Tasa de variacion media:

Definimos **incremento** Δ como la diferencia: **Δ = valor final – valor inicial**

Así: $\Delta x = x_f - x_i$ y $\Delta f = f(x_f) - f(x_i)$

Definimos **Tasa de variacion media** de esta funcion f , al cociente entre estos incrementos.

O sea: $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(t_f) - f(t_i)}{x_f - x_i}$$

(tambien llamado **Razón** o **Cociente incremental**)

Volvemos al problema:

Respuesta:

a) En 1995 t_1 = f(t_1) = En 1999 t_2 = f(t) =

La pérdida promedio , la calculamos obteniendo el cociente incremental de *f* con respecto a *t*

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} =$$

Si llamamos con P_1 a (t_1 ,f(t_1)) y con P_2 a (t_1 ,f(t_1)) , **el cociente** obtenido representa geometricamente **la pendiente** de la **recta Secante** que pasa por esos dos puntos.
(traza en forma aproximada en la gráfica de la pagina anterior)

b) Para el inicio del año 1997, aplicar la tasa de variacion media no es suficiente, puesto que se tiene **un solo punto** de referencia. Llamemos con P_0 (t_0 $f(t_0)$) el punto a analizar.

En ese caso se considera un incremento h muy pequeño en la variable independiente tal que h= $t - t_0$ y $\Delta f = f(t_0 + h) - f(t_0)$ y se aplica el límite cuando h $\to 0$.

O sea si P_0 (3 , $f(3)$), planteamos:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta f}{h} =$$ **(Tasa instantanea** de **cambio)**

Comparando este límte finito obtenido con el cociente incremental calculado, son diferentes.

Dicho límite en realidad es la pendiente de la **Recta tangente** a P_0 y se puede trazar en la curva.

De forma similar, calcula la rapidez de las pérdidas al inicio del año 2000:

Trazar esta recta tangente en un punto dado en general es **un problema** en otras funciones cuando se desconoce el valor de la pendiente de esa recta.(si es que existe)
El deseo de medir y de cuantificar el cambio, la variación de funciones , y **la rapidez** de predecir esos cambios, condujo en el siglo XVII hasta la noción de **Derivada**

Derivada de la función en un punto:

Definición

Sean *f* una función real , x_0 un punto interior de su dominio, la derivada de la función *f* en x_0 es la expresión:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ o bien $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ *

Donde: $h = x - x_0$ denota el cambio o variación de la variable *x* (si h > 0 será el incremento de x)

f(x+h) – f(x) denota la variación de *f* cuando *h* es el cambio de *x* (si es positiva la variación de *f* se denomina incremento de *f*).

* Si este **límite existe en x_0**, se dice que *f* **es derivable** en x_0 y se escribe de cualquiera de las siguientes formas

$f'(x_0)$ $\frac{df}{dx}(x_0)$ $y'(x_0)$ D_x

Ejemplo: Determinar la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ en x_0, aplicando la definición.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0+h)^2 - 5(x_0+h) + 3 - (2x_0^2 - 5x_0 + 3)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 5x_0 - 5h + 3 - 2x_0^2 + 5x_0 - 3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^2 + 4x_0h + 2h^2 - 5x_0 - 5h + 3 - 2x_0^2 + 5x_0 - 3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{4x_0h + 2h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x_0 + 2h - 5)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (4x_0 + 2h - 5) = 4x_0 - 5$$

Así, si $x_0 = 3$ entonces: $f'(3) = 4.3 - 5 = 7$.

Diremos que ***f*** **es derivable** en 3 , y 7 es la **pendiente** de la recta tangente a *f* en (3, 6)

Actividad 1:

Halla la derivada de la función $f(x) = 1/x$ en x_0 y luego analiza si f es derivable en 0.

Actividad 2:

Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3 - x^2$ en el intervalo [0,2]
Grafica la curva y traza la recta secante.

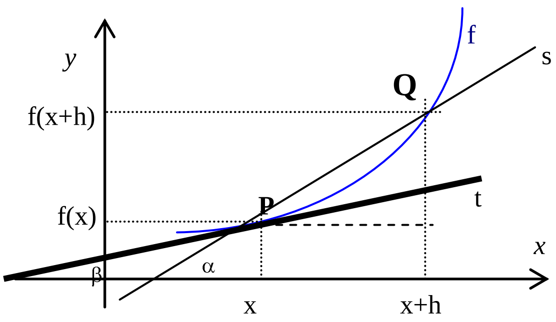
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Si P y Q son los dos puntos *(x, f(x))* y *(x+h, f(x+h))* sobre la gráfica de *f*, entonces la razón de cambio $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ representa la pendiente de la recta secante a la curva en P y Q, o sea que es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el semieje $\overrightarrow{OX}$.

Cuando h se hace cada vez más pequeño, el punto Q se aproxima cada vez más a P y la recta secante tiende a la recta tangente.

Cuando h $\longrightarrow$ 0 , la pendiente de la secante PQ se aproxima a la pendiente de la recta tangente en P.

Así se llega a : $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ número real que representa **la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto** P(*x, f(x)*).



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = tg\alpha$$

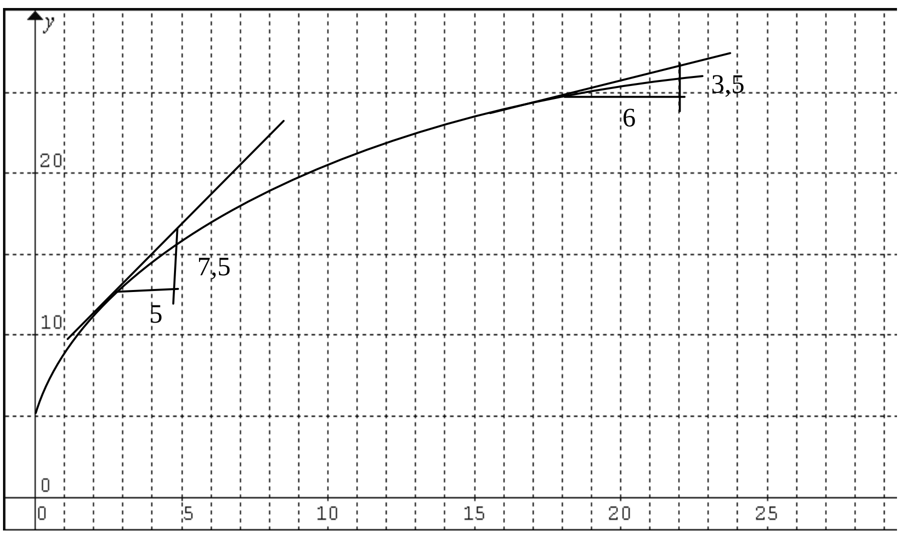
$$h \to 0, \quad Q \to P, \alpha \to \beta$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\alpha\to\beta} tg\alpha$$

$$f`(x) = tg\beta$$

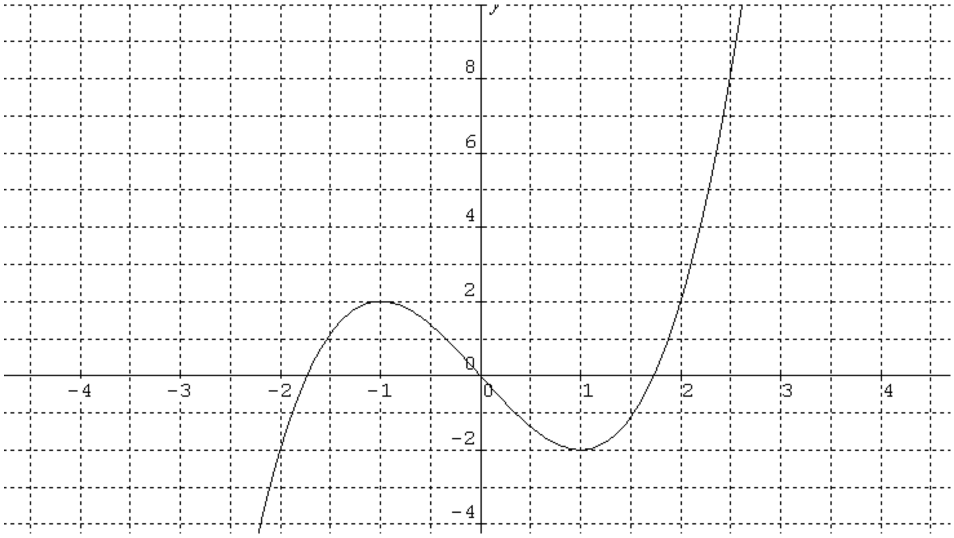
Actividad 3:

La siguiente gráfica muestra el peso de un bebe promedio desde el instante de nacimiento hasta la edad de 2 años(t =24). Calcular las pendientes de las rectas tangentes respectivas para estimar la razón de cambio del peso del bebe promedio cuando t = 3 y cuando t = 18



Actividad 4:

Determinar la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ en $a = -2$ y trazar la recta tangente por dicho punto en el gráfico que se imdica.¿Cuál será la recta tangente en a = 1?



Recta tangente

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto *(a,f(a))*, se obtiene aplicando:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Actividad 5:

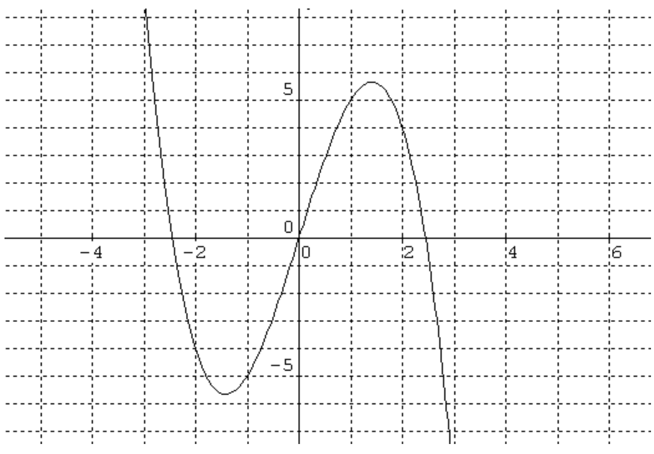
Dada la función $f(x) = (x-2)^2$, en $a = 3$ se desea obtener:

a) La derivada de la función en ese punto, aplicando la definición:

b) Representa la función f y la recta tangente a la curva en ese valor de a.

c) Determinar la ecuación de la recta tangente en a.

Actividad 6: ¿En que puntos de la curva la tangente es horizontal?¿Y cuánto es su pendiente?



Función derivada:

Sea f derivable en todo punto de D, se define la función derivada como la función que a cada x de D le asigna la derivada de f en x. En símbolos: $f': x \mapsto f'(x)$

Actividad 7:

Halle la función derivada, aplicando la definición: a) $f(x) = x^3 - 4x$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Derivada de funciones especiales

- Derivada de la **función constante:** "La derivada de una constante es igual a cero"
  Sea f(x) = k
  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$
- Derivada de la **función identidad:** "La derivada de x es igual a uno"
  Sea f(x) = x
  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$
- Derivada de una **función potencial:** la derivada de ***$f(x) = k\,x^n$*** es ***$f'(x) = k.n\,x^{n-1}$***

Ejemplos: 1) $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$ 2) $g(x) = \sqrt{6}$, $g'(x) = 0$

<u>6.2 ÁLGEBRA DE DERIVADAS</u>

Sean f y g derivables en un punto interior x de sus dominios. Entonces:

- Derivada de **la suma**: La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas.
  (f +g) '(x) = f'(x) + g'(x)
- Derivada de **la resta**: La derivada de la resta de dos funciones es igual a la resta de las derivadas.
  (f - g) '(x) = f'(x) - g'(x)
- Derivada de **un producto**: (f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)
- Derivada de **un cociente**: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

(Para la demostración de las propiedades, ver anexo al final de la cartilla.)

Ejemplo: $f(x) = x^5 + x^{-2} - 5x + 8$, su derivada es: $f'(x) = 5x^4 - 2\,x^{-3} - 5$

Actividad 8:

Determine las derivadas de las siguientes funciones, aplicando el álgebra de derivadas y las derivadas especiales:

i) $f(x) = 2x^3 - 4x^{-2} + 3$

ii) $f(x) = (4x-2x).(x^2 - 3)$

iii) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^3}$

iv) $f(x) = \dfrac{4}{x} - 5\ln x + \sqrt[3]{x}$

Actividad 9:

Si f y g son funciones derivables en x, demostrar que : $(f + 4 g)'(x) = f'(x) + 4 g'(x)$

<u>Derivada de funciones compuestas</u>. (Regla de la cadena)

Sean f: A→B y g: B→C tales que, f es derivable en x y g derivable en f(x), entonces g o f es derivable en x su derivada es : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

Actividad 10:

Obtener la derivada de las funciones compuestas siguientes, suponiendo dominios posibles.

a) $y = sen\ (2x^3)$

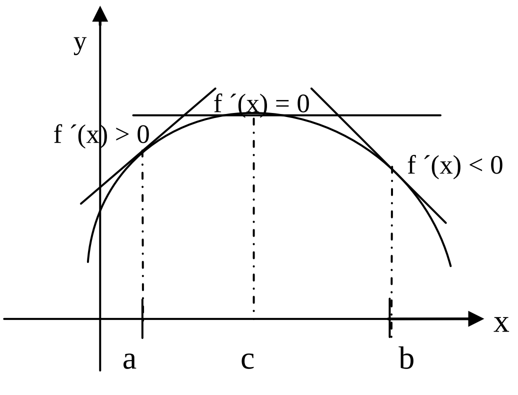
b) $y = \sqrt[4]{x^2 + 3x + 2}$

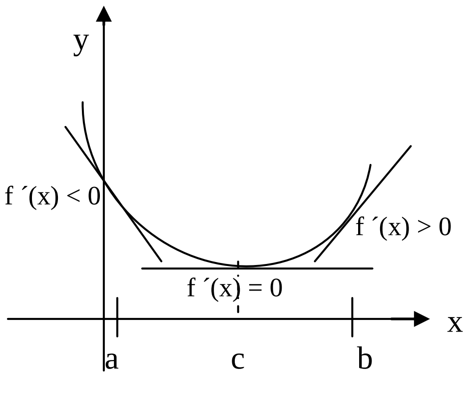
c) $y = 2\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

d) $y = e^{\sqrt{3x}} + \sqrt{3x}$

Algunas aplicaciones de la derivada

El valor de la pendiente de la recta tangente en un punto dado de una curva de función, además de servir para el trazado de dicha recta, nos informa sobre los **máximos o mínimos** relativos que se presentan en la curva , y si en ese intervalo es creciente o decreciente la función, como se observan en las siguientes :





Actividad 11:

Dada la función $t(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$. Determina:

a) Puntos en los que la derivada se anula.
b) Pendiente de la recta Tg si $x_0 = 1$

Análisis Marginal:

El análisis marginal consiste en la utilización de la derivación de funciones para calcular tasas de cambio de unas magnitudes respecto de otras. Los análisis marginales más habituales en economía son: el cálculo del **costo marginal** y **el ingreso marginal**.

El **Costo marginal** es la tasa de cambio instantáneo del costo de producción respecto al número de unidades producidas. Lo notamos con CMg

$CMg = \frac{dC}{dq}$ donde: C(q) es la función de Costos y q es el nº de unidades

El **Ingreso marginal** es la tasa de cambio instantáneo del Ingreso respecto al número de unidades producidas. Lo notamos con IMg

$IMg = \frac{dI}{dq}$ donde: I(q) es la función de Ingreso y q es el nº de unidades

Actividad 12: Sean las funciones de Costo e Ingreso de un producto

$$C(q) = 10q^2 – 5q \qquad I(q) = 6q^2 + 18q$$

Responde:

a) Si en la actualidad se producen 10 unidades ¿Se obtienen pérdidas o beneficios?

b) ¿Y si se producen 5 unidades?

c) Calcule las funciones de costo e Ingreso marginales

d) Si q = 7 , analice utilizando las funciones marginales , si interesa o no producir una unidad mas

Derivadas sucesivas

Sea f derivable en todo punto de D. Entonces existe f' (derivada primera de f). Definimos:

Derivada segunda: a la derivada de la derivada primera de una función. Se simboliza con f'' y se define por

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$ (en el caso de que exista).

Derivada tercera: es la derivada de la derivada segunda. Se simboliza con f''' y se define por

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

Derivada de orden n: En general se define a la derivada de f^{n-1} . O sea:

$$f^{n}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{n-1}(x+h) - f^{n-1}(x)}{h}$$

Nota: en el caso que la función no sea derivable en todo su dominio se define el dominio de la función derivada como el subconjunto del dominio de f , formado por los elementos del dominio de f para los que el límite de la definición de derivada existe.

Actividad 13:

Halle las derivadas sucesivas hasta la de segundo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3.senx$ b) $g(x) = \frac{x}{x+1}$ c) $f(x) = (-3x^3 + 2x)^2$

Actividad 14:

Calcular los puntos en que la derivada 1ª de $f(x) = \frac{x+1}{x}$ es igual a -4 .

Problema:

Cecilia trabaja en una tienda de departamentos B&C donde en un dia laboral recibe 8 pesos por hora por las primeras 8 hs y $ 10 por cada hora extra. La función

$$f(x) = \begin{cases} 8x & si \quad 0 \le x \le 8 \\ 10x - 16 & si \quad 8 < x \end{cases}$$

Proporciona las ganancias de Cecilia en un día laboral cuando ha trabajado x hs.

Trazar la grafica y analizar si f es diferenciable en x= 8

6.3 PROPIEDAD: DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

"Si f es derivable en x, entonces f es continua en x"

Actividad 15:

Analizar si a función valor absoluto $f(x) = |x|$ es continua y derivable en 0.

Actividad 16:

Estudiar la derivabilidad de la función siguiente en los puntos dados:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & x \geq 1, \end{cases}$$

$en\ x = 0,\ x = 1/2,\ x = 1.$

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Dada la función $y = f(x)$, su diferencial se define como el producto de la derivada de la función por el incremento de la variable independiente. Es decir:

$$\boxed{dy = f'(x)\ \Delta x}$$

Si tomamos el caso particular:

$$y = x \Rightarrow dx = 1 \,.\, \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

Por lo tanto se puede redefinir el diferencial de una función como el producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente, es decir:

$$\boxed{dy = f'(x)\ dx}$$

Ejemplo: $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 6$

$dy = (6x^2 - 10x + 3)\ dx$

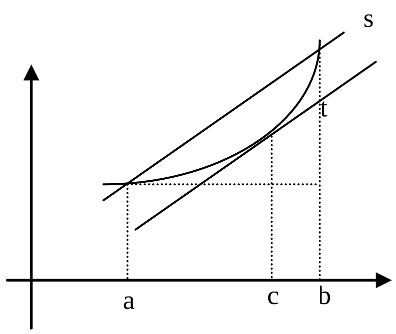
Teorema del valor medio

Sea f continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe *c* perteneciente a (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica

“Existe una recta tangente a la gráfica de f en un punto (c,f(c)), paralela a la recta secante a la misma en los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))”



Nota:
Por la interpretación geométrica de la derivada, f’(c) es la pendiente de la recta tangente T a la gráfica de f en (c, f (c)) y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta “ S ”.

La demostración se encuentra en la parte anexa de la cartilla (Pag 20)

TABLA DE DERIVADAS

f(x)	$\frac{df}{dx}$	f(x)	$\frac{df}{dx}$
k	0	senx	cosx
x	1	cosx	- sen x
$\lvert x \rvert$	sg(x) $x \neq 0$	tgx	$1 + tg^2 x$
x^m	mx^{m-1}	Arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Arccosx	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	shx	chx
e^x	e^x	chx	shx
Lx	$\frac{1}{x}$	thx	$1 - th^2 x$
$L\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	Argshx	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Sg(x)	$0 \quad \forall x \neq 0$	Argchx	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x La$	Argthx	$\frac{1}{1-x^2}$

Problema 2: Costos de producción- La Antiderivación

La compañía Hnos Díaz que fabrica guitarras profesionales estima que costo marginal por la producción de sus guitarras de la serie "concerto" es:

$C'(x) = 0{,}002.x + 100$ dólares por mes cuando el nivel de producción es de x unidades por mes.

Los costos fijos son de U$ 4.000 por mes. ¿Cuáles son los gastos totales mensuales de la Compañía relativos a la producción de x guitarras por mes?

La respuesta a este interrogante está en plantear y aplicar **el proceso inverso a la derivación**, puesto que se conoce la razón de cambio, pero no la relación entre la función de Costo y las cantidad de unidades producidas, o sea C(x).

El proceso inverso a la derivación recibe el nombre de antiderivada o primitiva de una función.

Parte B: 7.1 Primitivas o Antiderivadas. Integrales indefinidas,

Definición: Una función F es una antiderivada o primitiva de f, en un cierto intervalo del D_f si y solo si la derivada de F es igual a f.

F es **una primitiva de *f*** en $\mathbf{D_f} \Leftrightarrow \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **:** $\mathbf{F'(x) = f(x)}$

Actividad 1:

Completa obteniendo las primitivas de cada una de las funciones:

a) f(x) = 2x	F(x) =	G(x) = $x^2 + 7$
b) f(x) = $4x^3$	F(x) =	G(x) =
c) f(x) = 1/x	F(x) =	G(x) =

Nota: La primitiva de una función **no es única**; Por ejemplo G es otra primitiva de f ¿Por qué?

Todas las primitivas de *f* están representadas por la expresión F + *C*, en la que *C* es una constante cualquiera y que se denomina **constante de integración**.

La familia de todas las primitivas de *f* se denota: $\int f(x).dx$

Expresión que recibe el nombre de **integral indefinida** de la función *f* (*x*) dx : es la diferencial de f

En definitiva la integral sobre f (x) es la función F(x)+ C : $\int f(x).dx = F(x) + C$

Propiedades:

- "Si G es una primitiva de f, entonces G + C (con C $\in$R) es una primitiva de f"
- "Si F y G son primitivas de f, entonces F y G difieren en una constante".
- La primitiva de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las respectivas primitivas :
$$\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
- La primitiva de una constante por una función es igual a la constante por la primitiva de la función.
$$\int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx$$

Algunas **integrales inmediatas** básicas

i) $\int k\,dx = kx + C$

ii) $\int dx = x + C$

iii) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad si \quad n \neq -1$

iv) $\int e^x dx = e^x + C$

v) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

vi) $\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$

Actividad 2:

Calcule la familia de primitivas de las siguientes funciones, integrando en forma inmediata:

a) $\int (-3x^2 + 2x^3 - 1)\,dx$

b) $\int (5e^x + 6x^{-2} - \frac{1}{x})\,dx$

c) $\int \left(\dfrac{2}{x^3} + 5x^5\right) dx$

d) $\int (\sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{x} + x)\,dx =$

Hay veces que para integrar en forma inmediata se debe expresar la función de otra forma:

Actividad 3:

Integrar las siguientes funciones:

a) $\int (x^2 - 3).(-2x + 5)\,dx$

b) $\int \left(\dfrac{\sqrt[5]{x} + x}{\sqrt{x}}\right) dx$

c) $\int \dfrac{(x-2)^2}{3}\,dx$

Existen ejercicios en donde no se puede integrar en forma inmediata. Se utilizan métodos de integración. Nosotros desarrollaremos: **el de sustitución** y el de **integración por partes**

Método de integración por sustitución

El método consiste en realizar un cambio de variable de manera de transformar una integral que no es inmediata en una inmediata, aunque con otra variable.

Ejemplo: $\int (2x+3)^3\,dx$ sustituimos según los cálculos auxiliares. :

$$u = 2x+3 \qquad du = 2\,dx \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int (2x+3)^3\,dx = \int u^3\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4} + c = \frac{(2x+3)^4}{8} + c$$

Actividad 4:

Evalue las siguientes integrales indefinidas utilizando el método de sustitución:

a) $\int (x^2+5x)^2.(2x+5)\,dx$

b) $\int \left(\frac{\cos x}{sen^3 x}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) dx$

d) $\int \sqrt[3]{2+x}\,dx$

e) $\int 4x\,.\,e^{x^2}\,dx$

f) $\int \left(\frac{-5x}{x+4}\right) dx$

Método de integración por partes

Este procedimiento se basa en la fórmula de la *derivada de un producto.*

Se aplica la fórmula:

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

Ejemplo: $\int x\,e^x\,dx$

Designamos en forma conveniente a cada factor con u y dv. Luego derivamos e integramos c/u

$$u = x \qquad du = dx \qquad dv = e^x\,dx \qquad v = e^x$$

Reemplazando, según fórmula: $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c$

Actividad 5: Evaluar las siguientes integrales aplicando integración por partes.

a) $\int \cos x.\,x\,dx$

b) $\int \frac{1}{2}x\,e^x\,dx$

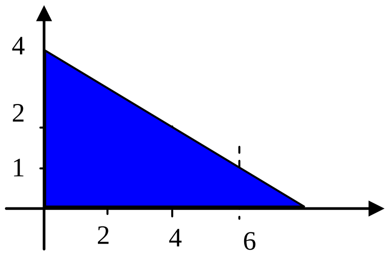
c) $\int \sqrt{x}.\ln x\,dx$

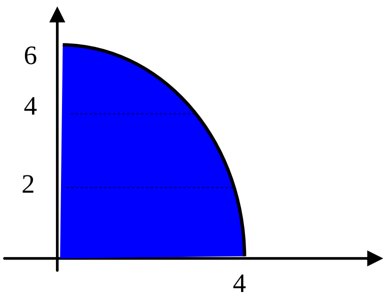
d) $\int \ln x.(3x-1)\,dx$

7.2 Integrales definidas, Cálculo de äreas

Problema : ¿Cuál es el área entre la curva de una función y el eje de las absisas?

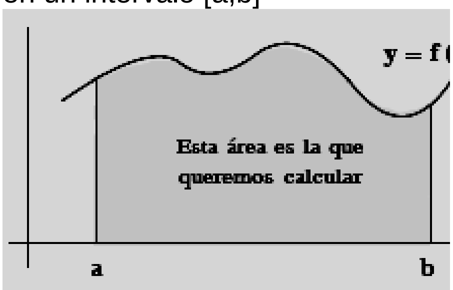
Veamos los siguientes ejemplos que representan curvas de demanda de una función.





En el primer caso podríamos aplicar fórmulas del cálculo de área de triángulos y de rectángulos. Pero en el segundo caso donde la gráfica no es una recta, no es tan sencillo el cálculo.

Sea f(x) una función continua y positiva en un intervalo [a,b]



Consideremos una *partición* del intervalo [a, b] ; o sea, cualquier conjunto de puntos:

$P = \{ x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n / a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \}$

De esta manera [a, b] queda dividido en subintervalos. En cada uno de ellos podemos encontrar Un mínimo y un máximo (dado que cada uno de ellos es también cerrado) a los que denominaremos mi y Mi, respectivamente.

Llamamos Δxi a la longitud del subintervalo $[x_{i-1} , x_i]$, o sea, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Pretendemos calcular el área encerrada por la función f en el intervalo [a,b]

Una aproximación por defecto de dicha área la obtendríamos al sumar el área de los n rectángulos de base Δx_i y altura m_i . A esta airea la denominamos **Suma integral inferior**
La expresión que permite calcular esta área es:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . m_i$$

De igual forma podemos calcular una aproximación por exceso al sumar las áreas de los n rectángulos de base Δx_i y altura M_i . A esta airea la denominamos **Suma integral superior**.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . M_i$$

Dado que $m_i < M_i$ entonces $s_n < S_n$

En cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ podemos elegir un punto interior que designaremos con c_i, y para cada uno de estos puntos es posible calcular su imagen que llamaremos con $f(c_i)$.

Designamos con A_n a la suma: $A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i)$

Si comparamos s_n , S_n y A_n , o sea las tres sumas, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . m_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . M_i \qquad \text{Por ser} \qquad m_i \leq f(c_i) \leq M_i$$

Si hacemos que las diferencias Δx_i sea pequeñas, podemos designar con *max* Δx_i a la mayor longitud de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ determinados y apliquemos el límite en los cuales *max* $\Delta x_i \to 0$. En este caso $n \to \infty$.

Si para cada subdivisión elegida ese límite es finito y el mismo para cada subdivisión, diremos que f **es integrable** en el intervalo [a, b] .

<u>Definición:</u>

Se llama integral de Rieman o **integral definida** al límite de la función A_n cuando $n \to \infty$ en [a,b] y se designa simbólicamente con:

$$\int_a^b f(x).dx \qquad \text{Es decir:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x).dx \qquad (1)$$

<u>Observación</u>: a y b reciben el nombre de límite inferior y límite superior, respectivamente.

Si calculamos la integral definida $\int_a^b f(x).dx$, se obtiene un número que representa el área entre la curva de función f y las rectas de ecuaciones y = 0 , x =a y x = b .

Ejemplo: Evaluar la integral definida de $f(x) = x - 5$ entre x=0 y x= 3 , es decir: $\int_0^3 (x-5)dx$

Dividimos a [0,3] en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3}{n}$. Los puntos extremos son:

x =0 , 3 /n , 2(3 /n) , 3(3 /n) , …….., (n-1).(3 /n) , n.(3 /n) .

Usando los extremos derechos, formamos la sumatoria:

$$S_n = \frac{3}{n}.f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}.f\left[2.\left(\frac{3}{n}\right)\right] + \frac{3}{n}.f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{3}{n}.f\left[n\left(\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{3}{n}.\left[\left\{\frac{3}{n} - 5\right\} + \left\{2.\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left\{n.\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\}\right] =$$

Aplicando prop. De sumatoria y algunos resultados conocidos:

$$S_n = \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}.(1 + 2 + \ldots.. + n)\right] = \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}.\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)\right] = -15 + \frac{9}{2}.\left(\frac{n+1}{n}\right) = -15 + \frac{9}{2}.\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Al calcular el límite resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[-15+\frac{9}{2}.\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] -15+\frac{9}{2} = -\frac{21}{2}$$

Luego : $\int_0^3 (x-5)dx = -\dfrac{21}{2}$

Teorema

Si $y = f(x)$ es una **función continua** definida en un intervalo **[*a, b*],** entonces $f(x)$ es Integrable, es decir, existe: $\int_a^b f(x).dx$ (siempre que exista el límite (1))

Propiedades de la integral definida:

i) $\int_a^a f(x).dx = 0$

ii) $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

ii) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx \pm \int_a^b g(x).dx$

iii) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

iv) Prop. Aditiva: $Si\ c\in[a,b],\quad \int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$

Actividad 6:

Aplicar propiedades a las siguientes integrales:

a) $\int_3^3 (-6+4x)dx =$

b) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^4 dx =$

c) $\int_1^3 (x^2-6+4x)dx =$

d) $\int_{-1}^{-4} \frac{x+7}{8}dx =$

Actividad 7:

Sabiendo que: $\int_0^3 f(x).dx = 12$, $\int_3^5 f(x).dx = 7$ y $\int_3^5 g(x).dx = \frac{3}{4}$. Calcular:

a) $\int_0^5 f(x)dx$

b) $\int_3^0 f(x)dx$

c) $\int_3^3 g(x)dx$

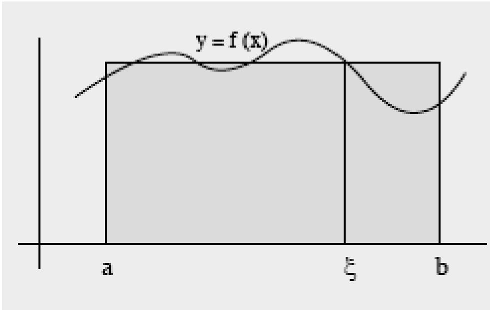
d) $\int_3^5 2.(f(x)-g(x))dx$

Teorema del valor medio

Si f es es una función continua en [a, b], entonces existe x $\in$ [a, b] tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Interpretación geométrica:



Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Si f es continua en [a, b], entonces la función integral F es derivable en [a, b] y F'(x) = f(x), para todo x $\in$ [a, b]

Demostración:

Por definición de derivada : $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Por definición de función integral: $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h}$

Por propiedad aditiva del intervalo de integración:

$\int_a^{x+h} f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+h} f(x)dx$, entonces $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h}$,

cancelando $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h}$

Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo [x, x+h], existe c perteneciente a (x, x+h) /

$\int_x^{x+h} f(x)dx = f(c).h$ Entonces $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c).h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$

Puesto que cuando h $\to$0 , c $\to$ x y por la continuidad de f , f(c) tiende a f(x).

Segundo Teorema fundamental del cálculo –Regla de Barrow

Si *f* es integrable sobre [*a, b*] y *f* = *F'* para alguna función *F*, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La integral definida de la función *f* (*x*) en el intervalo [*a, b*] es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior e inferior del intervalo y la notamos de la forma:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: $\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$

Actividad 8:

Evaluar las siguientes integrales definidas

a) $\int_0^3 2x^2 dx$

b) $\int_0^{\Pi} \text{sen}\, x\, dx$

c) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

d) $\int_1^2 x\sqrt{x^2+2}\, dx$

Tabla de valores

	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2
sen	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	0

Cálculo de área:

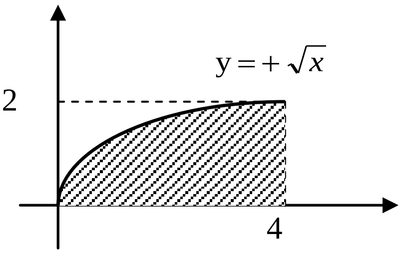
La integral de Riemann de una función positiva f en el intervalo [a, b] geométricamente nos permite calcular la medida del área que encierra la gráfica de *f* y el eje x en el intervalo [a, b].
Si una función f es integrable en [a, b] , entonces se define el área de la región de plano determinada por la gráfica de f y el eje x entre x = a y x = b, como:

$$A= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

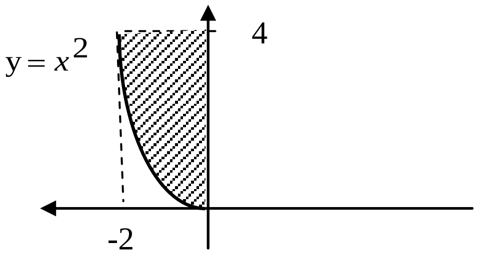
Actividad 9:

Calcule el área de la zona sombreada:

a)



b)



Actividad 10:

Calcule el área bajo las gráficas de las funciones, en el intervalo indicado:

a) $f(x) = 4 - x^2$ en $[0, 2]$

b) $f(x) = x^3$ en $[-3, 0]$

c) $f(x) = 2 + x - x^2$ en $[-2, 3]$

Area entre dos curvas:

El área comprendida entre las gráficas de dos funciones f y g en el intervalo [a, b], está dada por :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

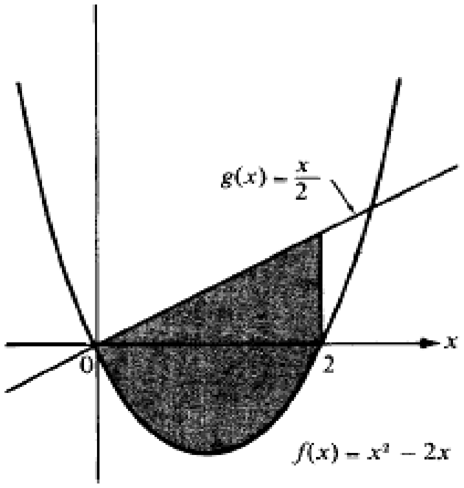
Ejemplo:

Calcular el área limitada por la recta $y = 2x + 3$ *y la parábola* $y = x^2$.

Dadas las funciones $f(x) = 2x+3$ *y* $g(x) = x^2$ *, los puntos de corte de ambas son,* $x = -1$ *y* $x = 3$.

Actividad 101:

Determine el área entre las dos funciones dadas según se indica:



Actividad 12:

Determine el área de las figuras limitadas por las gráficas de las siguientes funciones, realice previamente el gráfico:

a) $f(x) = -x^2 + 8$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$ y $g(x) = 4$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$

d) $f(x) = (x^2 + x - 2).(x-3)$ y el eje OX.

ANEXO : _Ejercicios Complementarios_

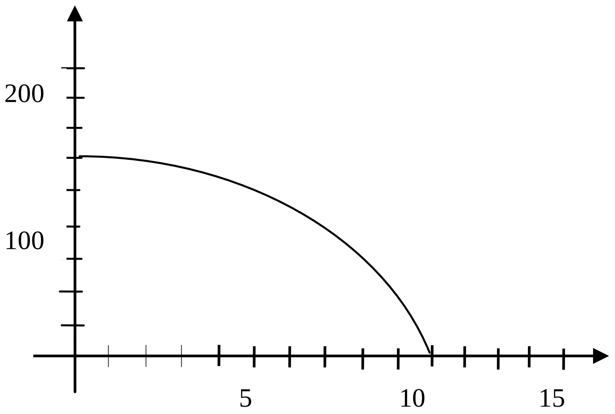
PARTE A	TEMA: DERIVADAS. CALCULO DE PENDIENTES REGLAS DE DERIVACION

1)

La gerencia de la compañía de llantas Titán ha determinado que la función de demanda semanal de sus llantas Super Titán está dada por :

$$P = f(x) = 144 - x^2$$

Donde *p* se mide en dólares y *x* en unidades de mil (ver figura)



Determina :

a) La razon promedio de cambio en el precio unitario de una llanta, si la cantidad demandada esta entre 5000 y 6000 llantas; entre 5000 y 5100 ; y entre 5000 y 5010.

b) ¿Cuál es la razón instantanea de cambio del precio unitario cuando la cantidad demandada es de 5000 unidades?

2) Derivar las siguientes funciones aplicando la definición de derivada en el punto que se indica.

a) $f(x) = -5x^2$ en $f'(2)$

b) $f(x) = x^2 + 1$ en x

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $f'(1)$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en $f'(-1)$

e) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ en a = 3

f) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ en a = 5

g) $f : x \to 2x - x^3$ $f'(x)$

i) $f : x \to \dfrac{1}{x^2 - 4}$ en x_0

h) $f : x \to \sqrt[3]{x}$ en x_0

k) $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ en $f'(4)$

3) Dada $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, hallar los puntos de su gráfica donde la recta tangente tiene pendiente $\frac{-1}{9}$

4) Obtenga las derivadas de las siguientes funciones, aplicando las reglas de derivación

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 2x$

b) $g(x) = \frac{3}{x} - 4\sqrt[3]{x^2}$

c) f(x) = tg x (*)

d) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$

(*) usar tg x = $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ y aplica derivada del cociente.

e) $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

f) f(x) = sen x - cos x + $\sqrt[3]{x}$

g) $f(x) = (3x^2 - 5)^5$

h) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 2)$

i) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

j) $f(x) = e^{\frac{x+1}{\text{sen } x}}$

k) $f(x) = \cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

l) $f(y) = (y-2)(2y-3)$

n) $f(t) = \frac{t + \frac{3}{t}}{\sqrt{t}}$

m) $f(y) = \sqrt[3]{4 - 9y}$

i) $g(x) = \frac{-\text{sen } x + 5\cos x}{4}$

ii) $f(x) = \frac{2x^3 . \ln x}{-4 + x}$

o) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

p) $f(\alpha) = sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

q) $f(\alpha) = tg\ \alpha \cdot sen\ \alpha$

r) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

s) $f(\alpha) = (sen\ \alpha + \cos\alpha)^2$

t) $f(x) = \ln x \cdot \frac{3x+1}{\sqrt[5]{x-1}}$

u) $f(t) = 2\ln\left(\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}\right)$

w) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{\ln x^2}$

x) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2+2}$

y) $f(y) = y\sqrt{a^2 + y^2}$

5) Obtener las derivada de segundo orden de las funciones cuyas reglas de correspondencia:

a) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\ln x}$

b) $g(x) = (3x^2 - 1) . \ln x$

c) *f(x)* = ln (2x)

d) $f(x) = x . e^x$

6) Calcular los puntos en donde se anula la derivada de $f(x) = x^3 - 2x$.

7) Sea la función $f(x) = -x^4 + 6x^2$ Calcular los puntos de f en los cuales se anula la derivada 2ª.

8) Indica si es que existen, los puntos donde la recta tangente a la curva es horizontal (máximos y mínimos) :

a) $f(u) = u^3 - 6u^2 + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x}{9 - x}$

9) Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Una función continua en un intervalo es derivable en todos sus puntos del interior.

(b) Una función es derivable en un punto si es continua y existen sus derivadas laterales en el punto.

(c) Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en el punto.

(d) Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en el punto.

(e) La función derivada es siempre continua.

(f) Los polinomios admiten infinitas derivadas.

(g) Si una función es derivable infinitas veces, entonces es un polinomio.

Aplicación:

10) La cantidad de cafeína en sangre, en miligramos por centímetro cúbico, a las *t* horas de haber ingerido un café, viene dada por la función $c(t)$ $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
¿Cual es la velocidad de eliminación de la cafeína a la hora de haber ingerido el café? ¿Y a las cinco horas? ¿Como evoluciona la velocidad con el tiempo?

11) La curva de costo total de un artículo, está dada por $y = 15x - 8x^2 + 2x^3$, donde "y "es el costo, "x" es la cantidad producida. Suponga que las condiciones del mercado indican que debe producirse entre 3 y 10 artículos. Determine la cantidad en ese intervalo por la cual el costo promedio es mínimo.

12) La función ingreso marginal de una empresa está dada por : $R(x) = 12{,}5 - 0{,}02\,x$
Determine el incremento del ingreso total de la empresa, cuando el nivel de ventas aumenta de 100 a 200 unidades.

13) Un empresario ha calculado que el costo total de repartir **x** unidades del producto que fabrica es: $C(x) = 2.x + 217800 / x$

a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto, halla el número de unidades que hará **mínimo** el costo del pedido.

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto?

14) Un fabricante vende **x** artículos por semana a un precio unitario **p** que depende de **x** según la expresión: $p(x) = 200 - 0{,}01x$ **p** en \$.

El costo total de producción de **x** artículos es: $C(x) = 50x + 20000$ \$ /sem.

a) Calcula el número de artículos que el fabricante debe producir para obtener **máxima** ganancia y el correspondiente precio de venta por unidad.

b) Supongamos que el estado fija un impuesto de \$10 por cada unidad vendida permaneciendo invariables las otras condiciones.

¿Qué parte del impuesto debe absorber el fabricante y cuál debe transmitir al comprador para obtener **máxima** ganancia?

Comparar las ganancias antes y después de establecido el Impuesto.

15) Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número N de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la relación:

$N(t) = - t3 + 6\ t\ 2 + 15\ t$

siendo **t** el tiempo transcurrido desde el inicio del turno (8:00 a 13:00 hrs.)

a) Grafica la curva de producción N(t) para $0 \leq t \leq 5$.

b) ¿A qué hora de mañana la tasa de producción (dN /dt) del trabajador (eficiencia) es máxima?.

c) ¿A que hora es mínima?.

d) Grafica la tasa de producción para $0 \leq t \leq 5$.

PARTE B	TEMA: **INTEGRALES.** CALCULO DE AREAS. METODO DE SUSTITUCION

11) Determine las integrales o primitivas de las siguientes funciones, aplicando los métodos estudiados:

a) $\int \frac{3}{2x}\,dx$

b) $\int \left(\frac{3x^3 + x^2 - 2}{x^2}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1}\right) dx$ *

e) $\int \operatorname{sen} x \,.\, \cos x \; dx$

f) $\int x\,(1 + x)^5 \; dx$

g) $\int 2x\sqrt{x^2 + 2}\; dx$

h) $\int (x^5 + 6).3x^4\, dx$

i) $\int - x \,.\, \cos x \; dx$

j) $\int \frac{\ln x}{x}\; dx$

k) $\int \frac{\left(\sqrt{x} + 7\right)^5}{\sqrt{x}}\; dx$

l) $\int \left(\frac{8x - 2}{2x^2 - x + 1}\right) dx$

m) $\int x^2 \,.\ln x \; dx$

n) $\int x^2\, e^x \; dx$

o) $\int \left(\frac{3x - 4}{x + 2}\right) dx$ *

p) $\int \frac{1}{\left(\;-5t\right)^2}\; dt$

q) $\int \frac{2u - 1}{4u^2 - 1}\; du$

r) $\int e^{3x+2}\; dx$

s) $\int \frac{1}{x} \cdot \ln^3 x \; dx$

t) $\int \left(\; x + 1\right)^{10} dx$

u) $\int (\operatorname{tg} x + 1)\; dx$

* Sugerencia efectúe previamente la división

12) Encuentre el resultado de las siguientes integrales:

a) $\int_{-4}^{2} (5 - x)\; dx$

b) $\int_{0}^{1} (e^x + 1)\; dx$

c) $\int_{0}^{1} (x^2 + 7x + 1)\,(2x + 7)\; dx$

d) $\int_0^1 x\; e^{x^2}\; dx$

e) $\int_0^6 \sqrt{2x+4}\; dx$ f) $\int_{-2}^{2} |x|\; dx$

g) $\int_0^3 f(x)\; dx \quad , \quad con \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$, graficar

Sugerencia: en los ejercicios c) , d) y e) resolver primero la integral por sustitución.

13) Determine y grafique el área bajo la curva de las funciones, entre los valores de x dados:

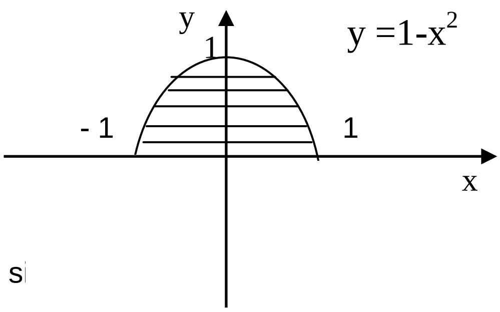
a) f(x) = -4x + 4 $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

b) f(x) = x^2 - 1 $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

c) f(x) = - x^2 – 2x + 5 $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$

14) El área de la figura rayada equivale a:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 2 e) Ninguna



15) Calcule el área encerrada por las gráficas de las si
previamente el gráfico:

a) f(x) = x + 2 y g(x) = x^2

b) f(x) = $2x^2$ y g(x) = 2x

c) f(x) = -3x - 1 y g(x) = $-x^2$ - 3

d) f(x) = $-x^2$ + x y g(x) = - x

e) f(x) = sen x y el eje de abscisas en el intervalo [0 , π]

f) f(x) = $-x^2$ + 6x – 4 y g (x) = $\frac{1}{5}$ (x^2 + 4)

16) Trace una gráfica y obtenga el área limitada por las curvas de las siguientes funciones:

$a)\ \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} y = x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} y = 25 - x^2 \\ y = (5 - x)^2 \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^3 \end{cases}$

APUNTE ANEXO

TEOREMAS PARA LA DERIVACION DE FUNCIONES

TEOREMA: La derivada de la suma de funciones es igual a la suma de las derivadas

Si f y g son dos funciones derivables en x , entonces $(f+g)´(x) = f´(x) + g´(x)$

DEMOSTRACION: Aplicamos definición de derivada , algebra de funciones y de límites

$$(f+g)`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$(f+g)`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$(f+g)`(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$(f+g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{f´(x) + g´(x)}$$

TEOREMA:
La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función si derivar por la derivada de la segunda.

Si f y g son dos funciones derivables, entonces se verifica que $[f(x).g(x)]` = f´(x).g(x) + f(x).g´(x)$

DEMOSTRACION: cambiamos h por Δx en la definición

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) . g(x+\Delta x) - f(x) . g(x)}{\Delta x}$$

Restamos y sumamos a al numerador de esta expresión $f(x + \Delta x) . g(x)$, con lo cual se tiene:

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) . g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) . g(x) + f(x+\Delta x) . g(x) - f(x) . g(x)}{\Delta x}$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) . g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) . g(x)] + [f(x+\Delta x) . g(x) - f(x) . g(x)]}{\Delta x}$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) . [g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x) [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \, . \, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \, . \, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$(f.g)`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \, . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(f.g)´(x) = f(x) \, g´(x) + g(x) \, f´(x)$$

Es decir:

$$\boxed{(f.g)´(x) = f´(x) \, g(x) + f(x) \, g´(x)}$$

TEOREMA: La derivada del cociente de funciones

Si f y g son dos funciones , entonces: $[f(x) / g(x)]`(x) = \dfrac{f´(x) \, g(x) - f(x) \, g´(x)}{[g(x)]^2}$

DEMOSTRACION:

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) \, g(x) - f(x) \, g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) \, g(x)}}{\Delta x}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \, g(x) - f(x) \, g(x+\Delta x)}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)}$$

Restamos y sumamos a al numerador de esta expresión f(x) . g(x), con lo cual se tiene:

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \, . \, g(x) - f(x) \, . \, g(x) - f(x) \, g(x+\Delta x) + f(x) \, . g(x)}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \, . \, g(x) - f(x) \, . \, g(x)] - [f(x) \, g(x+\Delta x) - f(x) \, . g(x)]}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) \, [f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x) \, [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)}$$

$$[f(x) / g(x)]`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x) \, [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)} - \frac{f(x) \, [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x \; g(x) \, g(x+\Delta x)} \right]$$

$$[f(x) / g(x)]\,`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)\, g(x+\Delta x)} \, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$[f(x) / g(x)]\,`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, \frac{1}{g(x+\Delta x)} \right] - \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x)}{g(x)\, g(x+\Delta x)} \, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)\, g(x+\Delta x)} \, . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f\,'(x) \, . \frac{1}{g(x)} - \frac{f(x)}{[g(x)]^2} \, .g\,'(x) = \frac{f\,'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\, g\,'(x)}{g(x)\, g(x)}$$

$$\boxed{[f(x) / g(x)]\,'(x) = \frac{f\,'(x)\, g(x) - f(x)\, g\,'(x)}{[g(x)]^2}}$$

TEOREMA: La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Si f es una función y c es una constante, entonces $[c\, f(x)]` = c\, f\,'(x)$

DEMOSTRACION:

$$[c.f(x)]`\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$[c.f(x)]\,`\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\, f(x+\Delta x) - c\, f(x)}{\Delta x}$$

$$[c.f(x)]\,`\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\, [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$[c.f(x)]\,`\,(x) = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\, .f\,'(x)$$

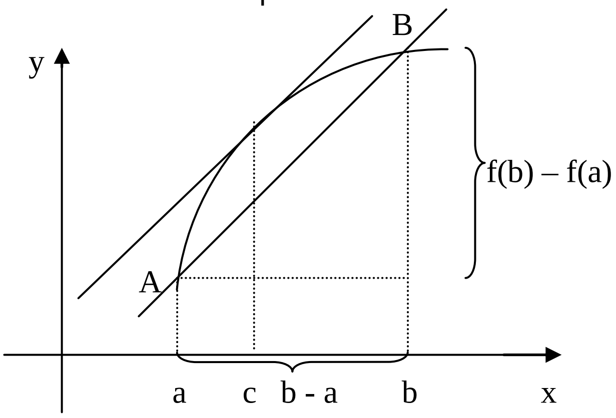
TEOREMA DEL VALOR MEDIO:

Sea f una función continua tal que:
1º) Es continua en el intervalo cerrado [a,b]
2º) Es diferenciable en el intervalo abierto (a,b)
Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que:

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DEMOSTRACIÓN:

La derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.



Si Trazamos la gráfica de f, entonces [f(b) – f(a)]/(b – a) es la pendiente del segmento de recta que une los puntos A y B.

El teorema del valor medio establece que existe algún punto sobre la curva entre A y B donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B, es decir, existe algún número c en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si el eje x estuviera a lo largo del segmento de recta AB, entonces el teorema del valor medio sería una generalización del teorema del Rolle, el cual se usa para esta demostración.

Para demostrar este teorema consideramos la función auxiliar:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Demostraremos que esta función F satisface las condiciones del teorema del Rolle

La función F es continua en el intervalo cerrado [a,b] ya que está definida como suma algebraica de funciones continuas, por lo tanto se cumple la primera condición del teorema del Rolle.
La función F es diferenciable en el intervalo abierto (a,b) pues está definida como suma algebraica de funciones diferenciable, es decir que también se cumple la segunda condición del teorema del Rolle.

Para ver que F cumple la tercera condición del teorema, calculamos F(a) y F(b):

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}\cancel{(b - a)} - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

Luego F(a) = F(b) = 0.

Por lo tanto al cumplirse las tres condiciones del teorema del Rolle podemos decir que existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que F ´(c) = 0.

Calculamos primero F ´(x):

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo tanto

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

O sea:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es lo que se quería demostrar.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

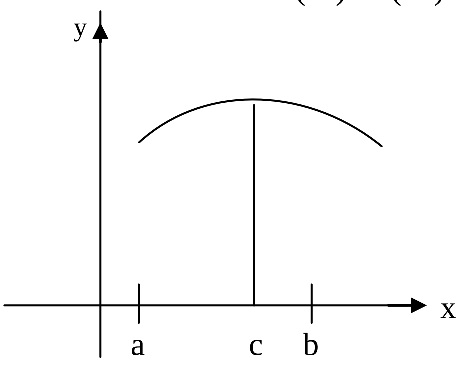
MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

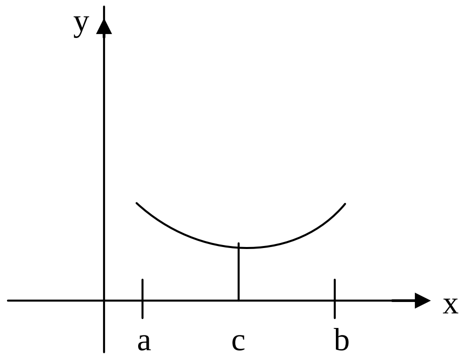
DEF.1: Una función tiene un máximo relativo en un punto de abscisa x = c $\in$ [a, b] si verifica:

$$f(c) > f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$$

DEF.2: Una función tiene un mínimo relativo en un punto de abscisa x = c $\in$ [a, b],si verifica que:

$$f(c) < f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$$





Si la función f tiene un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo en c, entonces se dice que f tiene un extremo relativo en c.

TEOREMA: Si f(x) existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a,b) y si f tiene un extremo relativo en c, donde a < c < b, si f ´(c) existe, f ´ (c) = 0.