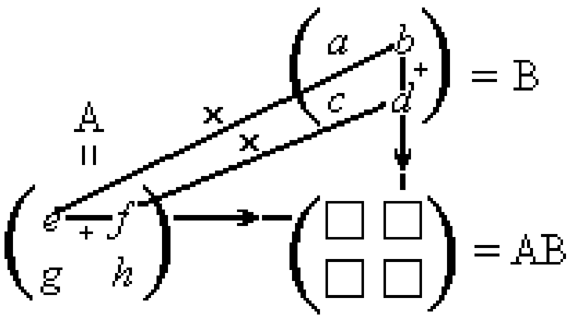
GUÍA DE TRABAJOS TEÓRICO- PRÁCTICO Nº 3 - 2016



UNIDAD III:

3.1. ESPACIO VECTORIAL – VECTORES:

Problema 1: El listado de precios de los productos que comercializa el Sr. García está dado por la tabla:

Tipo de producto	A	B	C	D
Precio	p_A	p_B	p_C	p_D

Si necesita aumentar cada producto un 15%. ¿Cómo expresaría los nuevos precios? si en un día determinado vendió al cliente I:12 productos A, 6 productos B, 13 del C y 26 del D. Al cliente II le vendió: 5 productos A, 8 del B, 7 del C y 25 del D.

Sea un conjunto **V** no vacío. Definimos:

Una ley de composición interna en V. La llamamos **+**
Es decir: +: **V** x **V** → **V**

Función que a todo par ordenado de elementos de **V** le haga corresponder un único elemento de **V.**

Una ley de composición externa en V: la llamamos ·
Llamaremos *ley de composición externa* definida en un conjunto **V** con operadores en otro conjunto A, a cualquier función de:

A x **V** → **V**

es decir, a la función que a todo par formado por un elemento de A y otro de **V** le hace corresponder un único elemento de **V**.

Definición de Espacio Vectorial:

Dados *V* (conjunto de vectores) , K conjunto de escalares, y las operaciones:

Suma : **+** : V x V $\to$V   Producto de escalar x vector: • : K x V $\to$V
($\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$) $\to \mathbf{u} + \mathbf{v}$ (l.c.i.)   (α,$\mathbf{u}$) $\to \alpha \bullet \mathbf{u}$ (l.c.e)

Espacio Vectorial es la cuaterna (V,+ , K, •) , que satisface los axiomas siguientes:

A) *Respecto de la suma:*

- Asociativa: $\forall\ \mathbf{u} \in V, \forall\ \mathbf{v} \in V, \forall\ \mathbf{w} \in V$: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- Conmutativa: $\forall\ \mathbf{u} \in V, \forall\ \mathbf{v} \in V$: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Existencia de elemento neutro: $\exists\ \mathbf{0_V} \in V / \forall\ \mathbf{u} \in V$: $\mathbf{u} + \mathbf{0_V} = \mathbf{u}$
- Existencia de elementos inversos: $\forall\ \mathbf{u} \in V, \exists\ (\mathbf{-u}) \in V / \mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = \mathbf{0_V}$

B) *Respecto del producto de escalar por vector:*

- Distributividad del producto de escalar por vector resp. de la suma de vectores: $\forall \alpha \in K, \forall\ \mathbf{u} \in V, \forall\ \mathbf{v} \in V$: $\alpha \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \bullet \mathbf{u} + \alpha \bullet \mathbf{v}$
- Distributividad del producto de escalar por vector resp.de la suma de escalares: $\forall \alpha \in K, \forall\ \beta \in K, \forall\ \mathbf{u} \in V$: $(\alpha + \beta) \bullet \mathbf{u} = \alpha \bullet \mathbf{u} + y \bullet \mathbf{u}$
- Asociatividad Mixta: $\forall\ \alpha \in K, \forall\ \beta \in K, \forall\ \mathbf{u} \in V$: $(\alpha.\beta) \bullet \mathbf{u} = \alpha \bullet (\beta \bullet \mathbf{u})$
- $\forall\ \mathbf{u} \in V$: $1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Actividad 1:

Probar que **(R^2, +, R, .)** tiene estructura de **Espacio Vectorial** sobre el **Cuerpo *R***:
Siendo: **u**= **(u_1,u_2)** y **v** = **(v_1,v_2)** vectores de R^2 , α escalar de R, y las operaciones suma y producto definidas por:

$+ : R^2 \times R^2 \rightarrow R^2$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow u+v \;/\; \mathbf{u+v} = (\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}) + (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}) = (\mathbf{u_1} + \mathbf{v_1}, \mathbf{u_2} + \mathbf{v_2})$

$\bullet : R \times R^2 \rightarrow R^2$

$(\alpha, \mathbf{u}) \rightarrow \alpha \bullet u \;/\; \alpha \bullet \mathbf{u} = \alpha \bullet (\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}) = (\alpha \mathbf{u_1}, \alpha \mathbf{u_2})$

Actividad 2:

Dados los vectores:

$\vec{u} = (-24, 18, 6) \qquad \vec{v} = (9, -3, 7) \qquad \vec{w} = (300, 400, 600)$

Completa:

i) El opuesto de $\vec{v}$ se simboliza con…... y su valor es ………………

ii) El vector 0,001.$\vec{w}$ es …………………..

iii) Aplica el axioma de la distributividad del producto de 5 por la suma de **u** y **v**

Actividad 3:

Se considera el conjunto V = { a + b$\sqrt{2}$ / a, b $\in$ R } y las operaciones:

(a + b$\sqrt{2}$) + (c + d$\sqrt{2}$) = (a + c) + (b +d)$\sqrt{2}$

α.(a + b$\sqrt{2}$) = (αa + αb$\sqrt{2}$), $\alpha \in$ R .

¿Es (V, +, R, **.**) espacio vectorial sobre R?

Actividad 4:

Resuelve cada uno de los problemas siguientes:

a) Según los últimos relevamientos del mercado automotriz, el vehículo más vendido del primer trimestre de 2010 fue el Chevrolet CORSA, que en ese mismo trimestre de 2009 vendió 7.400 autos y creció un 23%. En segundo lugar se posiciona Volkswagen GOL TREND que en el mismo período de 2009 vendió 6200 y la venta creció un 17% y en tercer lugar se ubica Peugeot 207 COMPACT que había vendido 5517 en el año anterior y sus ventas crecieron un 3%. Exprese las nuevas ventas.

b) Como consecuencia de problemas económicos, el directorio de una empresa láctea se ha resuelto rebajar en un 12% los gastos que superen los $1000. A continuación se muestra un vector con los distintos rubros de gastos
G= (1230, 1500, 1750, 1800, 2000), Obtenga un nuevo vector donde figuren los rubros ya aplicados los descuentos. ¿A que espacio vectorial pertenece G?, ¿Qué operación definida espacios vectoriales puede utilizar para hacer este cálculo?

Propiedades de un espacio vectorial:

Si (V, +, R .) es un espacio vectorial sobre **R**, se verifican las siguientes proposiciones, para todo ***a*** **,** ***b*** de V y para todo α , β de R:

① $\alpha.\mathbf{0} = 0.\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$

② $(-\alpha).\mathbf{a} = \alpha.(-\mathbf{a}) = -(\alpha.\mathbf{a})$

③ $(\alpha-\beta).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a} - \beta.\mathbf{a}$

④ $\alpha.(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} - \alpha.\mathbf{b}$

⑤ $\alpha.\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\,(\alpha = 0)\text{ ó }(\mathbf{a} = \mathbf{0})\,]$

⑥ $\alpha.\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{b},\ \text{con } \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$

⑦ $\alpha.\mathbf{a} = \beta.\mathbf{a},\ \text{con } \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$

3.2 SUBESPACIOS VECTORIALES:

Sea $W \subseteq V$ y $W \neq \emptyset$. W es subespacio de V (espacio vectorial) si cumple:

- Para todo u, v $\in$ W $\Rightarrow$ u + v $\in$ W
- Para todo u $\in$ W y para todo $\alpha \in$ R (cuerpo de los números reales) $\Rightarrow$ $\alpha u \in$ W

Por ejemplo: W={(x,-2x) / x $\in$ R } es un S.E.V. de R^2 y $A \subset W$

3.3 COMBINACIÓN LINEAL:

Un vector v es una **combinación lineal** de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si, para unos ciertos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (llamados coeficientes), se cumple:

$$v = \alpha_1 .v_1 + \alpha_2 .v_2 + \ldots + \alpha_n . v_n$$

Se dice también que el vector v **depende linealmente** de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ejemplo:

El vector (2, -5, -1) es una combinación lineal de los vectores (2, -1, 3) y (1, 0, 2), ya que se cumple que existen escalares 5 y -8 , tales que:

$$5. (2, -1, 3) – 8. (1, 0, 2) = (2, -5, -1)$$

Ejemplo de combinaciones lineales **triviales**:

En **(R^2, +, R, .) :** 0.(2, -1) + 0. (1, 0) = (0, 0) (donde: (0,0) es el vector nulo en **R^2**)

3.4 DEPENDENCIA LINEAL:

Dada la combinación lineal igual al vector nulo: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_v$

(Donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y 0_v vectores)

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, los vectores son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**.

Si existe algún α_i distinto de cero los vectores son **LINEALMENTE DEPENDIENTES**.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL:

W es una base de V (espacio vectorial) si y solo si:

- Los vectores de W son linealmente independientes y los vectores de W generan V.

  Ejemplo: En el espacio R^2 , **los vectores canónicos (1,0) y (0,1)** son **una base**.

Actividad 5:

Efectuar la combinación lineal:

a) $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2}$ si $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ y $\mathbf{v_1} = (-2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (4,-1)$

b) $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3}$ si $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$ y
$\mathbf{v_1} = (-3, 6, -2)$, $\mathbf{v_2} = (3,0,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-3,1,0)$

c) trivial si $\mathbf{v_1} = (0,-1,8)$, $\mathbf{v_2} = (-3,-1,4)$

Actividad 6:

Encontrar los escalares, si es que existen, para que el vector (-4, -2, 7) sea combinación lineal de:

a) los vectores canónicos de R^3.

b) los vectores (4, 0, -7) y (-4, -1, 7)

c) los vectores (-1, -2, 3) y (1, -4, 2)

Actividad 7:

Analizar si el vector *u* es una combinación lineal de los vectores v_i

a) $\vec{u} = (5, -7)$, $\vec{v}_1 = (-1, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, -2)$

b) $\vec{u} = (-1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 1)$

c) $\vec{u} = (2, -1, 4)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 3)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-2, 0, -6)$

Actividad 8:

a) ¿Es posible obtener una combinación lineal de los vectores (2, -1) y $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ distinta de la trivial y que se obtenga como resultado el vector nulo?.

b) Ídem pero con los vectores (2, -1) y (0,1)?

Actividad 9:

Analizar la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores. (si son L. I. o L. D.)

a) $\{(2,0),(1,-1)\}$

b) $\{(-1,3),(4,-12)\}$

c) $\{(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,2)\}$

d) { (-2, 1, 3), (1, 2, 1) , (0, 5 , 5) }

Actividad 10:

Los vectores (3, -2, -1, 3), (1, 0, 2, 4), (7, -4, x, y) son linealmente dependientes. Halla x, y.

3.5 Matriz de orden mxn: Notaciones.

Llamaremos *matriz de números reales de* ***orden m*** x ***n*** a un arreglo o conjunto ordenado de **m**. **n** números reales, dispuestos en **m** filas y **n** columnas:

Los números en un arreglo se denominan elementos de la matriz y los denotaremos genéricamente con a_{ij} para designar a que fila y columna hace referencia según su ubicación. El subíndice i hace referencia a la fila y j a la columna en la que se ubica el elemento.

Notación:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Otra forma simbólica de notar la matriz A es: A = (a_{ij}) con *i = 1, 2, ..m* y *j = 1, 2, …n*

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 8 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & -2 \\ 12 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 3 x 4 donde: $b_{13} = 8$ por ej.

Matriz Cuadrada: *Cuando* ***m = n*** (el número de columnas y el número de filas coincide),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ y la expresamos $A \in R^{n x n}$

Los elementos: a_{11} , a_{22} , a_{33} , …,a_{nn} se ubican en la **diagonal principal** de *A*.

Otra forma de expresar la matriz cuadrada A es escribir en **una** fila las **n** columnas:

$$A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_j, \dots, A_n) \quad con 1 \le j \le n$$

Nota: Si $\boldsymbol{m \neq n}$, la matriz se llama Matriz Rectangular.

Al **conjunto** de todas **las matrices** de **m filas x n columnas** de números reales lo denotamos con R^{mxn}. Así si una matriz cualquiera A tiene ese orden, diremos que: $A \in R^{m x n}$

Actividad 11: Determinar el orden de cada matriz y el valor de: $b_{12} - b_{21}$

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ $b)\ B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $c)\ C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

3.6 Matrices Especiales

Se considerarán ciertas clases de matrices que tienen formas especiales.

Matriz Nula: Es una matriz cuyos elementos son todos nulos, y la notamos con 0_{mxn}

$$0_{mxn}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $0_{2x3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{2\,x\,3}$

Matriz Identidad o Unidad:

Sea $I_n \in R^{n\,x\,n}$, $I_n=\begin{cases} 1 \text{ , si } i=j \\ 0 \text{ , si } i\neq j \end{cases}$ $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Ejemplo: $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos que **no** están en la diagonal principal son nulos.

$D\, es\ matriz\ diagonal \Leftrightarrow a_{i\,j}=0 \quad \forall\, i\neq j$ $D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$ Ejemplo: $D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En particular: Si una matriz diagonal tiene elementos iguales, se dice ***Matriz Escalar***

Sea E $\in \Re^{nxn}$, $E\ es\ Matriz\ Escalar \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ , } si \ \ i=j \\ 0 \text{ , } si \ \ i\neq j \end{cases}$, $E=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Superior:

$A\in R^{n\,x\,n}\ es\ \ Triangular\ \ Superior \Leftrightarrow a_{i\,j}=0 \ \ \forall\, i>j$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejemplos: $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Nota:
No se impone ninguna condición sobre los elementos situados en la diagonal principal o por encima de ella. Estos también pueden ser ceros

Matriz Triangular Inferior.

$A\in R^{n\,x\,n}\, es\ \ Triangular\ \ Inferior \Leftrightarrow a_{i\,j}=0 \ \ \forall\, i<j$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Nota: Los elementos situados en la diagonal principal o por debajo de ella pueden ser ceros también, dado que la condición no esta definida para esos elementos.

Matriz Simétrica: $A \in R^{n \times n}$ *es Simétrica* $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i,j = 1,2,...,n$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz Antisimétrica: $A \in R^{n \times n}$ *es Antisimétrica* $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\, i,j$ = 1,2,.., n

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: En estos casos los elementos de la diagonal principal son siempre **nulos**.

3.7 Igualdad de Matrices

Sean dos matrices cualesquiera del mismo orden: $A, B \in R^{m \times n}$
La matriz *A* = [a_{ij}] es igual a la matriz *B* = [b_{ij}] si y solo si sus elementos correspondientes son iguales.

Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow \forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$

Observación: Matrices son de diferente orden no son iguales. Ej.: $[2\ 2] \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Actividad 12:

Escribir las matrices definidas de la siguiente forma y clasificarlas:

$A \in R^{3 \times 3}$ / A = (a_{ij})$_{3x3}$ donde se define $a_{ij} = \begin{cases} -10 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$

$B \in R^{3 \times 2}$ / B = (b_{ij}) con $b_{ij} = (-1)^{i-j} .(2i+j)$

C $\in R^{3x3}$ **/ C = (c_{ij})** con **c_{ij} =** $\begin{cases} 0 & si \quad i > j \\ i - 2j & si \quad i \leq j \end{cases}$

Actividad 13:

Indica el orden y el tipo de matriz: $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Actividad 14:

Determine el valor de las incógnitas (reales) aplicando "igualdad de matrices" en cada ítem:

a) $\begin{pmatrix} 3+x & -6 \\ 3 & 3-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & -6 \\ 3 & 4+y \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x+y & 2p-q \\ x-y & 2q-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Actividad 15:

Escriba dos matrices de distintos órdenes de cada tipo según se indica:
a) Nula b) Unidad c) Escalar d) Diagonal e) Triangular Superior f) Triangular inferior

Actividad 16:

(Inventario de una librería)

El inventario de una librería de la carrera de Ciencias Económicas es:

Libros de: Derecho 80 , Contabilidad 160 , Impuestos 120 y Administración 240
Apuntes de : Contabilidad 120 , Impuestos 80 y Administración 160

a) Represente mediante una matriz A , el inventario de esa librería.

b) Si la biblioteca de la Universidad tiene el 15% de ese material
¿Cuál es la matriz en ese caso?

Actividad 17: **Matriz de insumo- producto**

Las matrices de insumo producto desarrolladas por W.W. Leontief, indican interrelaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía durante algún período. Un ejemplo hipotético para una economía simplificada está dado por la matriz M que representa la tabla siguiente:

Productores/Consumidores	Industria A	Industria B	Industria C	Otros consumidores
Industria A	50	70	200	360
Industria B	90	30	270	320
Industria C	120	240	100	1050
Otros Productores	420	370	940	4960

Donde los sectores consumidores son los mismos que los productores-industriales, gobierno, acero, agricultura, doméstico, etc.

$$M = \begin{pmatrix} 50 & 70 & 200 & 360 \\ 90 & 30 & 270 & 320 \\ 120 & 240 & 100 & 1050 \\ 420 & 370 & 940 & 4960 \end{pmatrix}$$

Cada renglón muestra cómo el producto de un sector dado es consumido por los cuatro sectores. Por ejemplo del total de la producción de la industria A, 50 unidades fueron para la misma industria A, 70 para la B, 200 para la C y 360 para todos los demás consumidores. La suma de todas las entradas del 1º renglón (680) da la producción total de A en un período. Cada columna da la producción de cada sector que es consumida por un sector dado. Por ejemplo la industria A consume 50 productos de A, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los otros productores.

Responda:

a) ¿Qué da la suma de las entradas de cada una de las columnas? ¿y de las filas? ¿qué observa?
b) Suponga que el sector A aumenta su producción en un 20%. Suponiendo que esto tiene como consecuencia un aumento uniforme del 20% en todos sus insumos, ¿en cuántas unidades el sector B aumentará su producción? . Responda la misma pregunta para C y para todos los demás productores.

Actividad 18:

Don Antonio tiene dos estaciones de servicio, una en el centro y otra en el sur de la Ciudad. Durante el primer fin de semana de mayo, las estaciones registraron las ventas de combustibles representadas por las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \\ centro \\ sur \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} diesel & super & super\ plus \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1200 & 750 & 650 \\ 1100 & 850 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ centro \\ sur \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} diesel & super & super\ plus \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1260 & 860 & 520 \\ 1160 & 750 & 750 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Halle la matriz que represente el total de ventas realizado en los dos días.
b) Si el lunes las ventas son siempre el 10% mas de la del día anterior
¿Cuál resulta ser la nueva matriz?

Si podemos responder a estas pregunta es porque estamos sumando matrices y multiplicando Escalar por matrices:

3.8 Suma de Matrices

Sean $A \in R^{mxn}$ y $B \in R^{mxn}$ matrices del mismo orden.

Se puede obtener otra matriz C = A + B , al sumar los elementos de *A* con los elementos correspondientes (misma fila y columna) de *B*.

Simbólicamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

En función de sus términos genéricos resulta: $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

De forma análoga se define:

Resta de matrices: $A - B = C \iff \forall\, i, j \ : a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ $L - M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Nota: No es posible Sumar o Restar matrices de tamaños u orden diferentes.

3.9 Producto de un Escalar por una Matriz.

Sean $A \in R^{m\,x\,n}$ y $\alpha \in$ R

Definimos producto $\alpha.A$ a la matriz que se obtiene de multiplicar α por cada elemento de *A*.

Simbólicamente:

$$\alpha.A = \alpha.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \cdots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \cdots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \cdots & \alpha.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sean: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y α = -3 $\quad -3.B = -3.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$

3.10 ESPACIO VECTORIAL DE MATRICES:

Propiedades de la Suma de Matrices.

S1: La Suma de matrices es Asociativa.

$$\forall A \in K^{mxn}, \forall B \in K^{mxn}, \forall C \in K^{mxn} : (A+B)+C = A+(B+C)$$

S2: Existe Neutro respecto de la Suma de matrices. Es la matriz nula

$$\exists\ 0_{mxn} \in K^{mxn} / \forall A \in K^{mxn}:\ A+0_{mxn} = 0_{mxn} + A = A$$

S3: Existe Inverso aditivo para cada matriz respecto de la suma de matrices

$$\forall A \in K^{mxn}, \exists\ -A \in K^{mxn} / :\ A+(-A) = (-A)+A = 0_{mxn}$$

S4: La suma de matrices es Conmutativa

$$\forall A \in K^{mxn}, \forall B \in K^{mxn}\ :\ A+B = B+A$$

Propiedades del Producto de un Escalar por una matriz.

Pr1: El Producto de un Escalar por una Matriz es Asociativa Mixta.

$$\forall A \in K^{mxn}, \forall \alpha \in K, \forall \beta \in K : (\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$$

Pr2: Distributividad del producto en R^{mxn} respecto de la suma en *R*.

$$\forall A \in K^{mxn}, \forall \alpha \in K, \forall \beta \in K : (\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$$

Pr3: Distributividad del producto en *R* respecto de la suma en R^{mxn}.

$$\forall \alpha \in K \wedge \forall A \in K^{mxn}, \forall B \in K^{mxn} : \alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$$

<u>**Nota**</u>: Estas propiedades confieren al conjunto **(K^{mxn} , +, K , .) la estructura** de **E.V.**

<u>Actividad 19:</u> Determinar las matrices: -A , 3.B, A+B , 2 A – B , sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

<u>Actividad 20:</u>

Efectuar: A – B , C + 0,5D, 2.(A + B) y 3D – 3C , con las matrices A ,B, C y D dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 6 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Actividad 21:</u>

Determinar el valor de cada incógnita en las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Actividad 22:</u>

Determinar la matriz X $\in$ R^{2x2} en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + 3X = I_2$$

Problema:

El número de acciones que posee Andrés está dado por la matriz

$$\begin{array}{cccc} & GM & IBM & BAC \\ A= & (600 & 400 & 120) \end{array}$$

Al cierre de la bolsa, cierto día los precios (en dólares por acción) de estas acciones es:

$$B=\begin{pmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{pmatrix}\begin{array}{l} GM \\ IBM \\ BAC \end{array}$$

¿Cuál será el valor total de las acciones de Andrés ese día?

3.11. Producto de Matrices

Sean $A \in R^{m\,x\,p}$, $B \in R^{p\,x\,n}$ con $A=(a_{ik})$ y $B=(b_{kj})$

Definimos la matriz producto C $\in \Re^{mxn}$ / C =(c_{ij}) , de la siguiente forma:

$$A\,.\,B\; = C \;\Leftrightarrow\; c_{i\,j} = \sum_{K=1}^{p} a_{i\,k}.b_{k\,j} = a_{i\,1}.b_{1\,j} + a_{i\,2}.b_{2\,j} + ... + a_{i\,j}.b_{j\,j} + ... + a_{i\,p}.b_{p\,j}$$

Es decir:

$$A.B=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1p}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2p} \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mp} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = C$$

Para obtener c_{11} se realiza el producto de la **fila 1** de la primera matriz por la **columna 1** de la segunda matriz, es decir: $c_{11} = a_{1\,1}.b_{11} + a_{1\,2}.b_{2\,1} + ... + a_{1\,p}.b_{p\,1}$

Para obtener c_{21} se realiza: $c_{21} = a_{2\,1}.b_{11} + a_{22}.b_{2\,1} + ... + a_{\,2\,p}.b_{p\,1}$

(El producto de la **fila 2** de la matriz A por la **columna 1** de la matriz B)

Ejemplo:

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1.1+0.(-3) & 1.3+0.2 & 1.(-2)+0.0 \\ (-3).1+1.(-3) & (-3).3+1.2 & (-3).(-2)+1.0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Condición Necesaria para el Producto de Matrices:

Si la matriz *A* es de orden *m x p* y la matriz *B* es de orden *p x n*, entonces **es posible** obtener otra *C* = A.B de orden *m x n* .

$$\underbrace{mx\boxed{p} \qquad \boxed{p}xn}_{\text{iguales}}$$

<u>Propiedades del Producto de Matrices.</u>

Prop._01: El Producto de Matrices es Asociativa.

$$\forall A \in K^{m\,x\,p}, \forall B \in K^{p\,x\,n}, \forall C \in K^{n\,x\,t} : (A.B).C = A.(B.C)$$

Prop._02: Distributividad del Producto respecto de la Suma de matrices .

$$\forall A \in K^{m\,x\,p}, \forall B \in K^{p\,x\,n}, \forall C \in K^{p\,x\,n} : A\,.(\,B\; + C\,) = A\,.B\; + A\,.\,C\,)$$

Prop._03: $\forall A \in K^{m\,x\,p}, \forall B \in K^{p\,x\,n}, \forall \alpha \in K : \alpha.(A.B) = (\alpha.A).B = A.(\alpha.B)$

Prop. 04: Si A $\in$ K^{nxn} , I_n es el neutro para el producto: A.I_n = I_n .A = A

Observación:

En general, el producto de matrices **no es conmutativo**, es decir : $A.B \neq B.A$

Actividad 23:

i) Calcula: A.B: $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

ii) Comprobar que: A..B $\neq$ B.A , $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Actividad 24:

Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S(sencillas), N(normales) y L(lujo). Cada vivienda de tipo S tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas. Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y2 bisagras.

a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el numero de cristales y el número de bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcular una matriz, a partir de las anteriores, que exprese el número de cristales y bisagras necesarios en cada tipo de vivienda.

Actividad 25:

Calcular: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 2. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Actividad 26:

Calcular los productos: i) E^2 y ii) $E^2 + C\,.B - I_2$, siendo :

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Actividad 27:

Encontrar una matriz X que verifique $X - B^2 = AB$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Actividad 28:

Calcula el valor de k para que se verifique: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

3.12 Transpuesta de una Matriz

La Transpuesta de una matriz $A \in K^{m \times n}$, es una matriz $B \in K^{n \times m}$ que se obtiene al permutar filas por columnas en la matriz *A*.

Simbólicamente: *B* es la Transpuesta de *A* $\Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i,j$

Denotaremos a la matriz transpuesta de *A* como A^t

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la transpuesta de *A* es: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedades de la Transpuesta.

Prop_01: La Transpuesta de la Transpuesta de una matriz es la misma matriz. $\left(A^T\right)^T = A$

Prueba. $\left((a_{ij})^T\right)^T = \left(a_{ji}\right)^T = a_{ij}$

Prop_02: La Transpuesta de la suma de matrices es igual a la suma de las Transpuestas

$(A+B)^T = A^T + B^T$

Prueba. $\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^T = (c_{ij})^T = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (a_{ij})^T + (b_{ij})^T$

Prop_03: La Transpuesta del producto de un escalar por una matriz, es igual al producto del escalar por la Transpuesta de la matriz.

$\left(\beta . A\right)^T = \beta . A^T$

Prueba. $\left(\beta . a_{ij}\right)^T = \beta . a_{ji} = \beta\,(a_{ij})^T$

Prop_04: La Transpuesta del producto de matrices es igual al producto de las Transpuestas en orden permutado.

$$(A.B)^T = B^T . A^T$$

Nota: También se dice que una matriz **es simétrica** si coincide con su transpuesta ($A = A^t$) y Es **antisimétrica** si coincide con su transpuesta cambiada de signo ($A= -A^t$)

<u>Actividad 29:</u>

Halla la matriz transpuesta de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; **e)** $(a\ \ b\ \ c\ \ d)$

<u>Actividad 30:</u>

Sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Verifique que : i) $(A + B)^t = A^t + B^t$ ii) $A^t . B^t = (B.A)^t$ iii) $(A^2)^t = (A^t)^2$

<u>Actividad 31</u>:

Sea: A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 9 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

Si se multiplica ½ por la suma de las matrices A y A^t ¿Qué se obtiene?

3.13 INVERSA DE MATRICES:

Sea $A \in R^{nxn}$ y $B \in R^{nxn}$ (matrices cuadradas)

A tiene inversa si y solo si existe otra matriz B del mismo tamaño tal que

$$A.B = B.A = I_n$$

Si B existe, se denomina Inversa de *A* (a su vez A es la inversa de B)

Simbólicamente:

$$A \in R^{n\,x\,n} \text{ es Inversible} \iff \exists\, B \in R^{n\,x\,n} / A.B = B.A = I_n$$

Nota : A la inversa de *A*, también se la denota con : A^{-1}

Por lo que la definición queda: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Las matrices que tienen inversa se llaman **inversibles** o N**o Singulares**

Propiedades de las Matrices Inversas.

Prop._01: *Unicidad de la Matriz Inversa*.

Si $B \in R^{nxn}$ y $C \in R^{nxn}$ son, ambas, inversas de la matriz $A \in R^{nxn}$, entonces $B = C$

Prop._02: *Inversa del Producto de Matrices.*

A y B son Inversibles $\Rightarrow$ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Prop._03: Si $A \in R^{nxn}$ es invertible, entonces A^T también es invertible. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Prop._04: La Inversa de la Inversa de una matriz es la misma matriz.

$\forall A \in R^{nxn} : (A^{-1})^{-1} = A$

Actividad 32:

Verificar que C es la inversa de A aplicando la definición.

A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & -4 \\ -1/2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Transformaciones u operaciones elementales en una matriz:

a) Cambiar el orden de las filas.
b) Multiplicar una fila por un escalar diferente de 0.
c) Sumar a alguna fila una combinación lineal de las demás.

Actividad 33:

Sea la matriz A: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ Efectuar en A:

i) F_{12} (permutar fila 2 por la 1)

ii) F_3 .(-2) iii) F_2 .(-2) + F_3

Equivalencia de Matrices

Sean $A, B \in K^{m\,x\,n}$

Diremos que la matriz *B* es Equivalente a la matriz *A* si y solo si *B* puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre la matriz *A*.

Simbólicamente: A ~ *B*

Cálculo de la matriz inversa:

Método de Gauss

Dada una matriz A $\in \Re^{nxn}$, se parte de esta y se coloca a su derecha la identidad I_n: $(A \mid I_n)$

1- Se elige de A un elemento distinto de 0 como pívot de cualquier fila (preferentemente 1).
2- Se copia la fila que pertenece el pívot y se convierten en 0 los elementos de esa columna.
3- A los restantes elementos (incluidos la identidad) se le realizan **operaciones elementales** por filas, hasta convertir en otra equivalente, sin cambiar el orden de las columnas.
4- Luego se elige otro pívot que tiene que ser de **otra fila** diferente del pívot anterior. Si el elemento seleccionado como pívot **es ≠1**, se lo convierte previamente multiplicando a toda la fila por su **inverso multiplicativo**. Los restantes elementos no se modifican en esta operación.
5- Luego se sigue la secuencia 2 y 3 dadas, hasta que no queden mas pívot que elegir y De esta forma A se transforma en la identidad I_n, mientras que I_n se transforma en A^{-1} .
El proceso se resume en:

$$(A \mid I_n) \rightarrow (In \mid A^{-1})$$

Nota: Si el proceso termina antes de poder elegir todos los n pivot necesarios, entonces se dice que: **A no tiene inversa** o **es Singular**

Actividad 34:

Aplicar el proceso de Gauss a la matriz C y probar que su inversa es A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 35:

Obtener, si existe, la inversa de cada una , aplicando el método de Gauss –Jordán:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Actividad 36:

Determine la matriz X que satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 37:

Dada la matriz diagonal D = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ calcula su inversa.

¿Como calcularías de forma rápida la inversa de una matriz diagonal cualquiera?

3.14 Rango de la matriz:

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cada una de sus **n** columnas $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ... , $\mathbf{A_n}$ puede considerarse, como un vector del espacio vectorial ($\mathbf{R}^n$, +, .).

Definición: llamaremos ***rango de A*** al número máximo de columnas (filas) de A que, como vectores de $\mathbf{R}^n$, son linealmente independientes.

Se denota con $r(A)$ o $\rho(A)$.

Ejemplos: $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ *r*(*M*) = 3 y *r*(*C*)= 2

Supongamos que tenemos una matriz *cualquiera* A, a la que aplicamos el método de Gauss con el fin de conseguir que tenga el mayor numero de ceros posible, realizando operaciones elementales en filas.
Llamaremos *rango de la matriz A* y lo representaremos por Rg(A) al **número** de filas no nulas de la matriz tras aplicarle el método de Gauss

Propiedad 1: Las matrices **equivalentes** tienen **igual rango**.

Consecuencia: El rango de una matriz A no se modifica si:

i) *Alteramos el orden de las columnas.*
ii) *Prescindimos (o aumentamos) una columna combinación lineal de otras.*
iii) *Multiplicamos una columna por un número distinto de cero.*
iv) *Sumamos a una columna una combinación lineal de otras.*

Propiedad 2: Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Leftrightarrow$ Rg(A) es máximo.

Actividad 38:

Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Actividad 39:

Calcular en función de k el rango de la matriz:

i) A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$ $\qquad$ ii) A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$

Actividad 40: Resolver los siguientes problemas de aplicación económica:

1- Una empresa nacional tiene cuatro distribuidoras, una en cada región (norte, centro, sur y Cuyo).
Las ventas de tres de sus productos por región, expresadas en millones de dólares, fueron:

Año 2013	Año 2014
Región 1, producto 1: 2.6	Región 1, producto 1: 3.6
Región 1, producto 2: 3.2	Región 1, producto 2: 4.5
Región 1, producto 3: 2.4	Región 1, producto 3: 2.9
Región 2, producto 1: 4.8	Región 2, producto 1: 2.5
Región 2, producto 2: 4.4	Región 2, producto 2: 5.0
Región 2, producto 3: 3.6	Región 2, producto 3: 3.0
Región 3, producto 1: 1.8	Región 3, producto 1: 3.0
Región 3, producto 2: 2.5	Región 3, producto 2: 3.5
Región 3, producto 3: 3.8	Región 3, producto 3: 4.6
Región 4, producto 1: 0.9	Región 4, producto 1: 2.5
Región 4, producto 2: 2.8	Región 4, producto 2: 3.8
Región 4, producto 3: 2.5	Región 4, producto 3: 4.0

I- Organizar los datos anteriores de modo que la información se presente en forma más clara.

II- Si llamamos A a la matriz de ventas del año 2013 y B a la del año 2014

a) Dar el significado de los elementos a_{23} y b_{21} .

b) Calcular las ventas totales de los dos años de cada producto y cada región.

c) Calcular e interpretar A - B

d) La gerencia de la empresa había proyectado para el año 2014 un 30 % de incremento en las ventas de los productos en todas las regiones respecto al año 2013. Calcular la diferencia entre los niveles de venta proyectados y los niveles de venta reales del año 2014.

2- *Bancos*

La matriz A los números de tres tipos de cuentas bancarias el primero de enero en el Banco Central y sus sucursales.

A =

	Cuentas de cheques	Cuentas de ahorro	Depósitos y plazos fijos
Oficina matriz	2820	1470	1120
Sucursal del Oeste	1030	520	480
Sucursal del Norte	1170	540	460

La matriz B representa los números y tipos de cuenta abiertas durante el primer trimestre y La matriz C se refiere a los números y tipos de cuentas cerradas durante el mismo período.

$$B = \begin{bmatrix} 260 & 120 & 110 \\ 140 & 60 & 50 \\ 120 & 70 & 50 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 100 & 80 & 90 \\ 70 & 30 & 40 \\ 60 & 20 & 40 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la matriz D, la cual representa el número de cada tipo de cuenta al final del primer trimestre en cada lugar.

b) Debido a la apertura de una empresa cercana se prevee un incremento en un 10% en la cantidad de cuentas en cada lugar durante el segundo trimestre. Escriba una matriz E que refleje este incremento previsto.

3- (*Costos de transporte*)
Una compañía tiene plantas en tres paises: Argentina Brasil y Chile, y cuatro centros de distribución en los lugares D, E, F y G.
El costo (en dolares) de transportar cada unidad de su producto de una planta A un centro de distribución está dado por la matriz siguiente:

	A	B	C
D	12	16	18
E	10	8	14
F	15	12	6
G	16	8	15

a) Si los costos de transporte se incrementan uniformemente en $2 por unidad.
¿Cuál es la nueva matriz?
b) Si los costos de transportación se elevan en un 20 % , escriba los nuevos Costos en forma matricial.

4- *Un comerciante tiene en su depósito para vender en el mes del mundial, diez televisores LCD de 42", doce de 32", quince de 22" y diez de 19". Los televisores de 42" se venden a $ 3800 cada uno, los de 32" a $ 3200, los de 22" , a $ 2500 y los de 19" a $ 2000.*

a) Exprese los vectores de stock y de precios.
b) Realice una valoración del inventario mediante el producto de esos vectores.

5- *Un empresario del espectáculo planea construir un cine, sala de fiestas y pabellón de deportes en tres localidades L1, L2, L3. Según un muestreo previo, las preferencias de dichos ciudadanos (en tanto por ciento) se plasman en la siguiente matriz:*

$$A = \begin{array}{ccc} \textit{cine} & \textit{fiestas} & \textit{deportes} \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 40 \\ 15 & 35 & 50 \\ 18 & 42 & 40 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} & L1 & L2 & L3 \\ \text{Habitantes} & (72\,000 & 14\,500 & 39\,200) \end{array}$$

Si el total de habitantes, mayores de 16 años, de las ciudades citadas vienen dado por la matriz fila dada, Investiga que tipo de espectáculo tendrá mayor número clientes.

6- *Una cadena de supermercados retribuye a sus empleados más eficientes mediante una paga extraordinaria anual si sobrepasan cierto nivel de resultados, y además les obsequia con bonos de compra en sus establecimientos por valor de 150 euros.*
El año pasado tres empleados de administración obtuvieron 250 euros en plata y 3 en bonos, 5 empleados de tiendas recibieron 300 euros y 4 bonos, y 2 personas del equipo directivo recibieron 600 euros y 8 bonos.
Calcúlese el total de retribuciones efectuadas utilizando matrices, e interprete el resultado.

7- *En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y lapiceras, agrupándolos en tres tipos de lotes:*
- Lote A: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 lapicera.
- Lote B: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 lapiceras.
- Lote C: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 lapiceras.
Cada carpeta cuesta $ 20 , cada cuaderno $ 12 y cada lapicera $ 1,5.

i) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

ii) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A, B* y *C.*

8- *En un curso de postgrado hay alumnos de tres provincias: Santiago, Tucumán y Catamarca, distribuidos por comisiones I, II, III y IV , según la matriz de la izquierda:*

	I	II	III	IV
S	20	16	14	18
T	10	8	10	12
C	15	12	8	10

	S	T	C
a	100	160	120
b	120	180	140

La administración del curso ha elaborado dos posibles formas de pago a y b (en pesos) de acuerdo a la procedencia de cada alumno según se muestra en la matriz derecha.
Expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por comisión para cada plan propuesto.

9- *En tres hipermercados diferentes, el precio del litro de aceite de oliva y el de aceite de girasol es:*

Hiperm.	Precio del aceite de oliva	Precio del aceite de girasol
Alfa	4,20	3,10
Beta	4,50	3,00
gamma	3,80	3,40

La familia Diaz compra cada mes 3 litros de aceite de oliva y 1 litro de aceite de girasol. La familia Perez adquiere 2 litros de aceite de oliva y 2 litros de aceite de girasol al mes.
Calcúlese, utilizando matrices, el gasto total en aceite realizado mensualmente por cada familia según el hipermercado que compre.

3.15. Ejercicios Complementarios.

1) Analiza si los vectores de (R4, +, .) : (6, 3, -3, 9), (0, 4, 2, 8), (3, 1, 0,-2), (5, 4, 0, 5) Son linealmente independientes.

2) Se sabe que los vectores de (R^3, +, .): (2, 1, -3), (1, 3, 2), (5, x, -4) son linealmente dependientes. Halla el valor de x.

3) determinar si $v_1 - v_2$ es combinación lineal de $u_1 - u_2$
$v_1 = (-1,0,1,-1)$ $v_2 = (1,1,1,1)$ $u_1 = (-1,2,1,3)$ $u_2 = (3,4,1,7)$

4) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$u_1 = (2, 1, 3, 4)$; $u_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $u_3 = (1, 3, 4, 1)$

5) Escribir las matrices definidas por las siguientes expresiones:

$A \in R^{2x3}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 3i - 2j$

$B \in R^{2x3}$, $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = -i + j^2$

$C \in R^{3x2}$, $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \begin{cases} -2j & si \quad i > j \\ i - j & si \quad i \leq j \end{cases}$

6) Calcular el valor de *k* y *p* para que las matrices E y F resulten iguales:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4-k \\ p-7 & -p+k \end{pmatrix} \quad y \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2+k \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

7) ¿Qué valores deben tener las variables para que se verifique la igualdad:

i) $\begin{pmatrix} a & 2-b \\ c-1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} x^2-u & 2+y \\ z-1 & u+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

8) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Calcular: $X = A^t + (-A)$

9) Hallar una matriz M, tal que: $- A + B - M = 0_{3x2}$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -30 & -20 \\ 10 & 50 \\ -40 & 30 \end{pmatrix}$$

10) Determinar X, tal que: 1/4 X - B = A , con :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

11) Dados X, Y matrices, resuelve:
$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

12) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Efectuar: B. A y luego A. C ii) Probar que el producto B.A.C es asociativo.

13) Calcular:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|cc} 1-x & 2-y & -z \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right) - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

14) Probar la propiedad asociativa del producto con A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

15) Calcular C^t. B^t. A^t con las matrices del ejercicio anterior:

16) Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal.
¿Es conmutativo este producto?

17) ¿Se puede multiplicar las matrices dadas?¿Qué resultado se obtiene?

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

18) Si $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que: $(A - I)^2 = 0$

19) ¿Se verifica que I.A = A ?, siendo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

20) Dadas las matrices A y B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Compruebe que A:B = 0_{3x3} , y que no necesariamente A = 0_{3x3} o B = 0_{3x3}
ii) B.A = 0_{3x3} ?

21) Halle todas las matrices A de tres columnas que verifiquen: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.A = A

22) Reducir la matriz A mediante operaciones elementales a
a) La matriz equivalente B
b) Una matriz triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

23) Verificar que la matriz A es igual a su inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

24) Dadas las matrices:

A = $\begin{pmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

i) Verificar que A es la inversa de B aplicando la definición.
ii) Aplicar el proceso de Gauss a la matriz B para obtener A.

25) Realiza las operaciones indicadas con las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

a) $(A+B)^2$ b) $A^2 + 2\,A.B + B^2$ c) $A.B^{-1}$ d) $(A+B^{-1}).A^{-1}$

Compara los resultados de a con b ¿Son iguales?

26) Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix} 0,21 & 0,31 \\ 0,04 & 0,18 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 50 & 8 & 0 \\ 20 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$

a) Calcular la traza de cada una.
b) Calcular la traza de C^t ¿Qué ocurre?

27) Dada la matriz B: $\begin{pmatrix} x+1 & 5-x & 2x \\ 3 & 1 & x \\ 1-x & -x & 3x-4 \end{pmatrix}$

Hallar los elementos de B si se saber que la suma de los elementos de la diagonal es 20.

28) Verifique que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ con A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

29) Calcular la inversa de A^{-1} sabiendo que $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

30) Sean las matrices:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Hallar X / *X.A.B – X.C = 2C*:

31) Calcular el rango de las siguientes matrices aplicando operaciones elementales de fila. Para las matrices cuadradas cuyo rango sea igual a su orden, encuentre las respectivas inversas.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

32) Si el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ = 2, ¿Puede ser el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e+b & f+c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ = 2 ?

Problemas de Aplicación:

33) Una empresa fabrica 3 tipos de artículos R, S y T . Los precios de coste y los de venta por Unidad , y el número de unidades vendidas de cada artículo quedan reflejadas en esta tabla:

	Precio de coste	Precio de venta	Unidades vendidas anualmente
R	6	18	2240
S	9'2	28	1625
T	14'3	40	842

Sabemos que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de venta, V, es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V.

b) Obtén, a partir de los anteriores, la matriz de ingresos anuales, A, correspondiente a los tres Artículos, la matriz de gastos anuales, G, y la de beneficios anuales, B.

34) Ramiro y Daniel tienen acciones de la bolsa dadas por la matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ Ramiro \\ Daniel \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} NEC & YPF & Movi & MP \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 300 & 260 & 50 \\ 100 & 200 & 400 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} NEC \\ YPF \\ Movi \\ MP \end{array} \begin{bmatrix} 54 \\ 48 \\ 98 \\ 82 \end{bmatrix}$$

Al cierre de las operaciones en cierto día, los precios de las acciones están dados por B. Calcule A.B y explique el significado de la matriz producto.

35) En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

MATERIAL \ PRODUCTO	*A*	*B*	*C*
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.

36) Una Fábrica textil de buzos para alumnos de la secundaria recibió encargos para la confección de un modelo A de buzos para un colegio I , otro modelo B de buzos para un colegio II y un modelo C para un colegio III. Siendo los pedidos de 35, 32 y 40 unidades para cada colegio respectivamente.
En la matriz siguiente están representados los insumos necesarios para cada artículo.

	Telas [m]	Cierres [u]	Hilo [u]	Tiempo de confección En forma manual[Hs]
Modelo A	2,5	1	3	4
Modelo B	4	3	5	6
Modelo C	5	1	4	5

a) ¿Que cantidades de cada tipo de insumo deben emplear la casa para realizar los distintos pedidos? Si el metro de tela cuesta $ 20, el cierre $ 4, la hora trabajada $ 10 y el hilo $ 1.
b) ¿Cuál es el costo de cada confección?
c) Si otra fábrica requiere de los mismos insumos pero tiene una maquina que tarda en confeccionar la mitad del tiempo estipulado en la primera ¿Aumentará el costo de los buzos?
d) Calcule el costo total de los encargos en cada uno.

37) La matriz A = $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$ representa las necesidades técnicas por unidad de producto para la producción de los artículos α y β .
La primera fila se refiere a las necesidades de mano de obra (número de horas que ha de trabajar un hombre por unidad de producto), y la segunda fila expresa el tiempo que debe funcionar la máquina por unidad de producto.
La primera columna indica las necesidades del producto α y la segunda columna nos dice que requiere β . El próximo mes se pretende fabricar 40 unidades de α y 25 de β . Calcúlese, matricialmente, cuántas horas - hombres es necesario contratar y cuánto tiempo deberá estar funcionando la máquina.

38) Una cadena de supermercados retribuye a sus empleados más eficientes mediante una paga extraordinaria anual si sobrepasan cierto nivel de resultados, y además les obsequia bonos con compra en sus establecimientos por valor de $ 350.
El año pasado 3 empleados de administración obtuvieron 450 euros en metálicos y 3 bonos 5 empleados de las tiendas recibieron 600 pesos y 4 bonos , y 2 personas del equipo directivo recibieron 900 pesos y 8 bonos. Calcúlese el total de las retribuciones efectuadas utilizando matrices, e interprete el resultado.

39) *Un estudiante gana $ 15 por hora impartiendo clases particulares, $6 por hora pasando trabajos en computadora y $2,50 por hora trabajando en un Ciber.*

El número de horas que ha trabajado durante los últimos meses en cada actividad está dada por la matriz:

	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Clases particulares	20	15	40	5
Trabajos con computadora	15	10	12	0
Ciber	30	20	16	10

Calcúlese la matriz de precios totales e interprete estas matrices.

40) Supóngase que a un contratista le fue adjudicada por licitación la construcción de 24 unidades edilicias que según el destino están distribuidas en la tabla I. Las cantidades de materiales y de mano de obra para cada tipo de edificación están contempladas en la tabla II.

La tabla III nos brinda información acerca de los costos unitarios de materiales y mano de obra.

TABLA I

Local	Dúplex	Planta
5	7	12

TABLA III [en $]

Mampostería	70
Hormigón	120
Revestimientos	10
Carpintería	50
Instalaciones	4000
Mano de obra	3

TABLA II

	Mampostería [m^3]	Hormigón [m^3]	Revestimientos [m^2]	Carpintería [global]	Instalaciones [global]	Mano de Obra [Hs]
Local Comer.	25	15	400	40	0,5	6000
Dúplex	35	30	750	20	1,0	8000
Planta Unica	40	20	800	18	0,8	7000

Se requiere conocer:

a) Demanda total de materiales y mano de obra para construir las 24 unidades funcionales

b) El costo total para cada tipo de edificación.

c) El costo total de la obra.

41) (*Sistema de precios*)

Una empresa produce lavarropas, licuadoras y ventiladores en serie. Dispone de $ 150.000 para la compra de motores, $ 120.000 destinados a armazones y $ 100.000 para microchips. ¿Qué precios unitarios debe pagar por los motores, los armazones y los microchips si la matriz de requerimientos de insumos es A?

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 \\ 30 & 40 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: llame P a la matriz precio y X a la matriz de precios unit.)