Unidad 2: SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS.

Una sucesión es un conjunto ordenado de elementos que responden a una ley de formación. La sucesión suele abreviarse:

$$(a_n)=(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$$

Siendo a_1 el primer término, a_2 el segundo término, a_3 el tercer término, etc. y los puntos suspensivos finales indican que consideramos sucesiones de infinitos términos.

Ejemplos:

$$(a_n)=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right) \ \forall\ n \in N : a_n = \frac{1}{n}$$

$$(b_n)= \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ..., -\frac{1}{n}, ...\right) \ \forall\ n \in N : b_n = -\frac{1}{n}$$

$$(c_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right) \ \forall n \in N : (c_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Observación*:* La fórmula que aparece al final de cada ejemplo es la que proporciona la ley o regla de formación de los elementos de la sucesión.

Podemos observar en los ejemplos anteriores que a cada número natural le corresponde un término de la sucesión y solamente uno, y que los términos de la sucesión pueden ser elementos de cualquier conjunto numérico. Esto nos da la idea que una sucesión es una función, cuyo dominio es el conjunto de todos los números naturales y su recorrido cualquier conjunto numérico.

Trabajaremos con sucesiones de números reales, es decir, aquellas cuyo dominio está formado por números naturales, y cuyo recorrido está formado por números reales.

Consideremos nuevamente la sucesión:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

Si tenemos en cuenta el concepto de función, a_1 es la imagen del número natural 1 por medio de la sucesión; a_2 es la imagen del número natural 2 por medio de la sucesión y así en ese orden.

Definición:

Una sucesión numérica es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido está incluido en el conjunto de los números reales.

En símbolos:

Una sucesión es una función s: N $\rightarrow$ R / $\forall$ n $\in$ N: s(n) = a_n

Representación gráfica.

Sea la sucesión $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$

Es usual representar directamente sus términos sobre la recta real de la siguiente manera:

Actividad

Representar gráficamente las sucesiones dadas anteriormente como ejemplos.

SUCESIONES ACOTADAS

El número real *p* es una *cota superior* de la sucesión (a_n) sí y sólo si:

$$\forall\ n \in \mathrm{N}:\ a_n \leq p.$$

De modo similar, q es *cota inferior* de la sucesión (a_n) sí y sólo si:

$$\forall n \in \mathrm{N}:\ a_n \geq q.$$

Si una sucesión admite cotas inferiores y cotas superiores se dice que está *acotada.*

Si una sucesión tiene una cota superior, tiene una infinidad de cotas superiores.

El mismo comentario vale para las cotas inferiores.

La menor de las cotas superiores se llama *supremo* de la sucesión, mientras que la mayor de las cotas inferiores se denomina *ínfimo* de la sucesión.

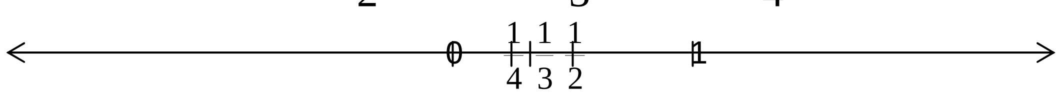
SUCESIÓN CONVERGENTE.

La noción de convergencia está unida al comportamiento de una sucesión (a_n) cuando n crece arbitrariamente.

Por ejemplo, sea la sucesión (a_n) tal que $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Podemos dibujar sobre la recta real los primeros términos:

$a_1 = 1$ $\qquad a_2 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad a_3 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad a_4 = \dfrac{1}{4}$



Se puede observar que a medida que n crece los términos de la sucesión se acercan a 0.

En general, si los términos de una sucesión se aproximan al número L cuando n crece de manera no acotada o para valores de n suficientemente grande, se dice que la sucesión converge a L y escribimos:

$$lim\ \ a_n = L$$

El límite finito de la sucesión corresponde al límite funcional:

$$lim_{x->\infty} f(x) = L$$

De ahí que en la notación $lim \; a_n = L$, no se escribe $n->\infty$, porque esto queda sobrentendido.

DEFINICIÓN:

La sucesión (a_n) converge al número L ,y se escribe :

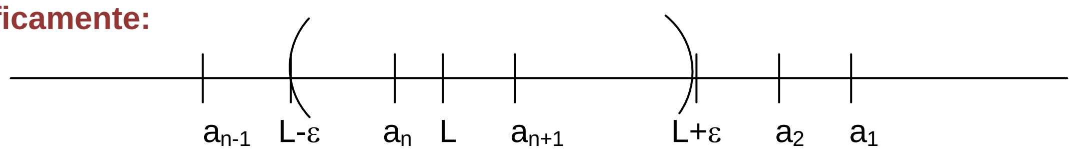
$$lim \; a_n = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que, para todo $n > N$ sea $|a_n - L| < \varepsilon$.

Lo que esto quiere decir:

La notación $lim \; a_n = L$ significa que los términos de la sucesión, se pueden aproximar a L cuanto se quiera, con tal de tomar n lo suficientemente grande.

Gráficamente:



La figura muestra una interpretación geométrica de la definición:

Que lim a_n = L, significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, en el intervalo (L - ε, L + ε) están todos los términos de la sucesión desde un n en adelante.

SUCESIONES DIVERGENTES

Dadas las siguientes sucesiones:

(a_n) = (1, 2 , 3 , 4,......., n ,...........)

(b_n) = (- ½, -1, -3/2, -2,.......,-n/2,.......)

No tienen límite finito.

En la sucesión (a_n), sus términos, a partir de unos de ellos, superan a cualquier número positivo que se elija.

En la sucesión (b_n) los términos negativos superan en valor absoluto, a partir de uno de ellos, a cualquier número positivo que se elija.
Se dice que estas sucesiones tienen límite infinito.
Una sucesión es divergente si y solo si su límite es infinito.
Se escribe: lim $a_n = \infty$

SUCESIÓN OSCILANTE.

Una sucesión es oscilante si y solo si no tienen límite finito ni límite infinito.

Ejemplos:

(a_n) = (0, 1, -1, 0 , 1, -1, 0 ,1, -1,.........)

$$(b_n) = \left((-1)^n \frac{n+1}{n} \right) = \left(-2, \frac{3}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-6}{5}, \ldots \right)$$

Estas sucesiones no tienen límite finito ni infinito.
Consideremos la segunda sucesión:

Si n es par $b_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$

Si n es impar $b_n = -1 - \frac{1}{n} \rightarrow -1$

Luego, no tiene límite finito ni infinito.

SUCESIONES MONÓTONAS

Una sucesión numérica (a_n) es creciente sí y sólo si:

$$\forall \ n \in N : a_n \leq a_{n+1}$$

y es estrictamente creciente sí y solo si :

$$\forall \ n \in N : a_n < a_{n+1}$$

De modo similar (a_n) es decreciente sí y sólo si:

$$\forall \ n \in N : a_n \geq a_{n+1}$$

y es estrictamente decreciente si y solo si:

$$\forall \ n \in N : a_n > a_{n+1}$$

Las sucesiones crecientes o decrecientes se llaman monótonas.
Aceptamos sin demostración el siguiente teorema.

TEOREMA FUNDAMENTAL

"Una sucesión monótona está acotada si y solo si es convergente".

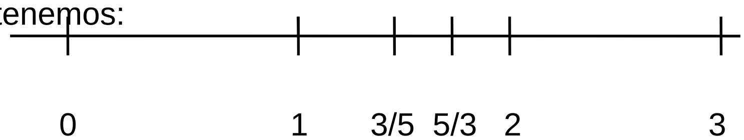
Veamos como se puede emplear este teorema.

Sea la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{2+n}{n}\right)$

Escribimos algunos términos de la sucesión:

(a_n) = (3, 2, 5/3, 3/2,7/5,.........)

Gráficamente tenemos:



Vemos que es una sucesión estrictamente decreciente.

Probamos esto de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{2+n}{n} \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{2+n+1}{n+1}$$

Debe ocurrir que: $\forall n \in N$: $(a_n > a_{n+1})$

$$a_n = \frac{2+n}{n} \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{2+n+1}{n+1}$$

$$\frac{2+n}{n} = \frac{2}{n} + 1 \qquad\qquad \frac{2+n+1}{n+1} = \frac{2}{n+1} + 1$$

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{2}{n} > \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{2}{n} + 1 > \frac{2}{n+1} + 1 \Rightarrow$$

$a_n > a_{n+1}$, como queríamos probar.

Esta sucesión esta además acotada: el supremo es 3 y para ver de qué manera está acotada inferiormente hacemos lo siguiente:

$$\frac{2+n}{n} = \frac{2}{n} + 1 \approx 1$$

para ***“n número natural suficientemente grande.”***

Luego el ínfimo es 1.

Tenemos entonces una sucesión monótona decreciente y acotada (inferiormente, en particular) luego por el Teorema Fundamental es convergente.

Además se puede probar que:

√ si (a_n) es monótona decreciente, lim a_n = ínfimo (a_n)

√ si (a_n) es monótona creciente, lim a_n = supremo (a_n)

Por lo tanto lim $a_n = 1$

Actividad

Realizar una tarea similar con la sucesión $(b_n) = \dfrac{7n+1}{n}$

Series Numéricas

Dada la siguiente sucesión de números reales:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$$

Consideremos las sumas parciales de sus términos:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Podemos construir una sucesión formada con la sumas parciales de la sucesión (a_n).

Esto es (S_n) = $(S_1, S_2, S_3, ...S_n, ...)$

Esta nueva sucesión (S_n) se llama *serie numérica asociada a la sucesión* (a_n).

Los números $a_1, a_2, a_3, ...$ se llaman términos de la serie y los números $S_1, S_2, S_3, ...$son sus sumas parciales.

Ejemplo

Sea (a_n) = $\left(\frac{1}{n}\right)$ = $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Luego $(S_n)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\ldots\right)$ es la serie asociada a la sucesión $\frac{1}{n}$

Para poner en evidencia los términos de la serie, suele llamarse serie a la suma formal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Luego, la serie anterior puede expresarse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{Ó simplemente} \quad \sum \frac{1}{n}$$

Una serie es convergente, divergente u oscilante sí y sólo si la sucesión de sumas parciales que la define es, respectivamente, convergente, divergente u oscilante.

Si la serie es convergente, el límite de la sucesión de sumas parciales se llama suma de la serie.

$$\text{Lim } (S_n) = S$$

y en ése caso se asigna este número como valor de la suma formal:

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S$$

SERIE GEOMÉTRICA

Comencemos recordando la noción de sucesión o progresión geométrica:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \ldots., a_1 r^{n-1}$$

se trata de una sucesión en la que cada término se obtienes multiplicando el anterior por un valor constante llamado razón.

Ejemplo:

Si $a_1 = 2$ y $r = 3$, tenemos la siguiente progresión geométrica:

2 , 2.3 , 2.3.3 , 2.3.3.3 ,.......,

$2 , 2.3^1 , 2.3^2, 2.3^3, 2.3^4 ,......., 2.3^{n-1}$

2, 6 , 18 ,..........

Ahora bien, una serie geométrica es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots$$

Recibe este nombre, de serie geométrica, pues sus términos corresponden a una progresión geométrica de razón r (r ≠ 0)definida

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

arriba. Para obtener S_n , seguimos el siguiente procedimiento:

multiplicamos ambos miembros por r :

$$rSn = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

Restando resulta:

$$Sn\,(1\text{-}r) = a - ar^n = a\,(1\text{-}r^n)$$

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Si $r \neq 1$

Para determinar el carácter de la serie geométrica debemos calcular lim S_n.

Se presentan varios casos, según el valor de r.
Sea r tal que:

$$-1 < r < 1 \quad o \quad /r/ < 1$$

Si $/r/ < 1 \Rightarrow \lim r = 0$

Luego $\lim S_n = \lim \dfrac{a}{1-r} - \lim \dfrac{ar}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

Luego, la serie converge y su suma es $S = \dfrac{a}{1-r}$

√ Si r > 1 o r < -1 o r = 1, la serie es divergente.
√ Si r = -1, la serie geométrica es oscilante.