

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO



FACULTAD DE HUMANIDADES,
CIENCIAS SOCIALES Y DE LA SALUD

MATEMÁTICA FINANCIERA

AÑO 2.011

Tema: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO
DEL CÁLCULO FINANCIERO

Equipo de Cátedra:



Ing. Ernesto Trejo (h)



Lic. Jorge Zorrilla



Lic. Lorena Zorrilla

Contador Público — Licenciatura en Administración
INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DEL CÁLCULO FINANCIERO

¿Alguna vez han comprado algo con pagos mensuales? Supongan que quieren comprar un automóvil de (U\$S) 10.000 y les dicen que los pagos serían de (U\$S) 273,11 al mes durante 48 meses. ¿Cómo sabrían si les están ofreciendo un buen negocio, un trato justo o un trato perjudicial?

Supongan ahora que tienen (U\$S) 10.000 para invertir durante un tiempo relativamente largo, y alguien les habla de una inversión que duplicará su dinero sin riesgo alguno: *Inviertan sus (U\$S) 10.000 ahora y recibirán (U\$S) 20.000 en 15 años.* ¿Cómo comparan esta inversión con otras inversiones sin riesgo?

En esta materia aprenderán a contestar tales preguntas; está dedicada en su totalidad, ***Al Principio Del Valor Del Dinero En El Tiempo.***

Los bienes y servicios económicos, constitutivos de riqueza, independientemente de las variaciones de valor de que son susceptibles de mercado a mercado y de las variaciones que responden a circunstancias y condiciones temporales de un solo mercado, experimentan modificaciones en el tiempo debidas a que valoramos en mayor medida un bien o servicio cuanto más pronto podamos utilizarlo o consumirlo.

Desprendernos de un bien que está en condiciones de satisfacer una necesidad inmediata, a cambio de la promesa de recibir otro bien futuro, será un acto económico en cuanto el último resulte de mayor valor, cierto o eventual.

Lo dicho es válido para el dinero, pues su disponibilidad permite transformarlo en un bien de uso o de consumo inmediato.

Cualquiera fuera el punto de vista, individual o social, este criterio económico reviste características universales, aunque a veces resulte difícil hallar una medida exacta y hasta aproximada del aprovechamiento futuro de ciertos sacrificios presentes, tratándose de inversiones que producen beneficios sociales.

No escapa a este concepto la formación del capital, en cualquiera de sus formas prácticas. Bienes y Servicios serán afectados al proceso productivo, económicamente, en tanto produzcan o prometan producir bienes o servicios de mayor valor en el futuro. A modo de ejemplo: sembrar trigo supone no utilizar con otro fin el valor de las semillas, desgastar maquinarias cuyo valor pudo destinarse a adquirir bienes y / o servicios de uso o consumo inmediato, quemar combustible cuyo valor monetario pudo tener el mismo destino, etc. La siembra es una actividad económica en cuanto quien la realiza lo hace ante la expectativa de obtener una cantidad de trigo cuyo valor monetario superará el de los desprendimientos o inversiones ocasionadas por el proceso, y lo superará en una cantidad aceptable que compense el sacrificio hecho de los bienes y servicios presentes.

Este elemental ***principio de economicidad*** da origen y fundamento a toda **LA TEORÍA DE LA INVERSIÓN**, contenida en la **Administración Financiera**, cuyo tratamiento técnico se realiza con las herramientas de nuestra disciplina: **Matemática Financiera**.

El valor de los bienes presentes que disponemos o podemos disponer constituye el **Capital Presente o Inversión**. El valor de los bienes futuros que recibiremos a cambio constituye el **Monto**, o **Valor Futuro**, aunque no fueren los mismos bienes ni de la misma naturaleza, el **Monto** está constituido por el capital presente (Inversión) y su acrecentamiento en el tiempo: el **Rédito ó Beneficio ó Interés**. El monto, como el

interés, resulta una variable temporal o sea: $K = f(t) \quad \wedge \quad I = f(t)$

El sentido amplio con que hasta aquí nos hemos referido al capital y al interés no es el que corresponde al tratamiento clásico que se le ha dado en Matemática Financiera. El capital fue considerado, casi con *exclusividad*, un préstamo en dinero, o a lo sumo, el importe financiado de una venta a plazos. En términos contables, vendría a ser el saldo de una clásica cuenta corriente. El interés se consideraba como la retribución por el uso del capital ajeno en el tiempo.

Aunque el préstamo a interés y el financiamiento de compras constituyan las operaciones más comunes sujetas a nuestro estudio, la tendencia moderna es ampliar el campo de aplicación de nuestra materia a temas tales como: **Evaluación Financiera de Proyectos, Teoría De Las Decisiones, Finanzas De Empresas, etc.**, todos los cuales pueden reunirse en la llamada **Teoría De La Inversión**, que nos obliga a redefinir, ampliando los conceptos iniciales como los que nos ocupan.

El cambio de bienes disponibles en uno o más momentos dados por bienes disponibles en otros momentos distintos constituye lo que llamaremos una **Operación Financiera**. La Matemática Financiera estudia precisamente las variaciones cuantitativas que experimentan los capitales en el tiempo, como consecuencia del principio de economicidad expuesto.

Analizaremos algunas definiciones que se ajustan genéricamente a los distintos temas de la asignatura, seguidas, cuando lo creamos conveniente, de otra, propia de las operaciones de préstamo.

Capital ó Inversión: Es el valor económico de los bienes y servicios destinados a la producción de nueva riqueza, o disponibles para su consumo, en un momento determinado. En particular, llamaremos Capital a una suma de dinero prestada o tomada en préstamo.

Interés: Es la variación cuantitativa del capital ó inversión en el tiempo. En particular, interés es la retribución por el capital prestado o tomado en el tiempo.

Monto: Es la suma del Capital ó Inversión y sus intereses, calculada en un determinado momento.

Operación Financiera: Es aquella en la que se cambian capitales no simultáneos, es decir, capitales disponibles en un momento, por otros disponibles o a disponer en momentos distintos.

Vamos ahora a analizar lo que a criterio de la Cátedra, constituye el punto cardinal de toda operación financiera: **LA TASA DE INTERÉS Y SUS COMPONENTES**. En un sentido amplio, aunque no el único que le podemos dar al tema, **tasa de interés** es el interés, beneficio ó costo, producido por una unidad de capital en una unidad de tiempo. Cualquiera puede ser la unidad de capital y la unidad de tiempo, pero lo corriente es expresar la tasa de interés referida a un capital, prestado o tomado en préstamo, invertido o recuperado, de 100 unidades monetarias y el tiempo referido a un año, generalmente sobreentendido. No obstante, la tasa puede ser referida a un semestre, a un mes, etc., en cuyo caso es necesario que mencionemos la unidad de tiempo.

En la técnica de nuestra materia, por razones de simplicidad en los cálculos, utilizamos la unidad de capital, **uno**, o sea, expresamos la tasa en **tanto por uno**.

Para realizar el **Análisis Financiero** vamos a descomponer la tasa de interés en los elementos que la integran normalmente:

- a) *el interés propiamente dicho;*
- b) *el riesgo de la operación;*
- c) *el gasto administrativo;*
- d) *la desvalorización monetaria.*

El **interés propiamente dicho** es una variable que, una vez fijado un valor para la tasa, resulta función de los otros componentes y puede adquirir valores negativos con las consecuencias lógicas resultantes, que se estudian en economía.

El **riesgo de la operación** puede estar dado por la probabilidad estimada, o más o menos conocida, de incobrabilidad o de no retornos de la inversión. Este componente, si se ha obtenido de la experiencia un índice de incobrabilidad confiable como proyección,

es incorporado muchas veces al gasto administrativo, sin ventaja alguna. En una operación aislada, el riesgo es totalmente subjetivo.

En una economía inestable, el riesgo de las operaciones financieras excede la probable incobrabilidad, pues aparecen y muchas veces con significativa importancia, otros riesgos, propios del acentuado desconocimiento de las variaciones económicas: *el tipo de cambio, si el crédito debe saldarse en una moneda distinta y la magnitud de la desvalorización monetaria, si la inflación no está razonablemente controlada.*

El **gasto administrativo** está dado, para el acreedor, por la administración del crédito: pagos, cobros, dirección, papelería y todos aquellos gastos que se pueden apreciar en una entidad financiera. Para el prestatario (deudor) incluye, además el costo de entrada y salida de la operación, que comprende gestión, comisiones, impuestos, etc.

La **desvalorización monetaria** o pérdida del poder adquisitivo de la moneda en que ha sido realizada la operación financiera es el cuarto componente a considerar, y puede ser, como muchas veces ha ocurrido, el principal por su magnitud.

La persona que se desprende de un capital debe recibir o recuperar ese capital o inversión más sus intereses o rendimiento de la inversión, con el mismo poder adquisitivo que tenía a la fecha de la inversión, para que ésta resulte redituable. Ese poder adquisitivo es el que nos permite homogeneizar la moneda en términos reales.

Una inversión de \$1.000.000 a un año de plazo y al 10 % de interés anual, si la moneda mantiene su valor, debe reintegrar \$1.100.000. Esa misma operación, si existe una inflación del 20 % anual, debe transformar al capital en \$1.200.000 y a los intereses en \$120.000, es decir, debe reintegrar \$1.320.000 para redituar el 10 % anual.

Si en cambio, con el 20 % de inflación la operación retorna \$1.100.000 no solo dejaría de haber interés, sino que habría una transferencia gratuita a favor del deudor.

Cuando, como en el ejemplo apuntado, la desvalorización es superior a la tasa de interés, ésta, en términos reales, resulta negativa: de ahí que frente a esta perspectiva resulte conveniente al deudor. Quien reciba un préstamo bancario, por ejemplo, no necesita afectarlo a la producción para verse beneficiado; le bastará adquirir bienes que conserven su valor real, almacenarlos y venderlos al vencimiento del plazo, para acrecentar su patrimonio, sin que la riqueza nacional aumente. Este acrecentamiento de su patrimonio sin creación de riqueza provendrá de una transferencia a su favor que le hace el banco y que éste recibe del ahorrista y depositante. Se produce en estos casos una incompatibilidad entre el interés individual y el social, que a veces se trata de remediar controlando el destino del crédito, sin que esta medida resulte eficaz, y aún resultando, sin que se corrija el mal de la transferencia.

No resultaría difícil hallar en la tasa de interés el valor de estos componentes analizados para operaciones concluidas. El problema radica en que fijada la tasa al pactar una operación, cuya naturaleza es prospectiva, el intento de descomponer esa tasa se hará siempre en condiciones de incertidumbre.

Una manera de separar la desvalorización monetaria de los demás componentes es calcularla por separado y a posteriori, como ocurre con los créditos indexados. En este caso, la incertidumbre se crea con respecto al valor a moneda corriente que deberá reintegrarse; preocupación que corresponde más al orden instrumental que al económico.

De los componentes enunciados, los tres primeros constituyen el **costo financiero global** para el tomador de un crédito. El cuarto, es decir, la desvalorización monetaria, es un componente de ajuste a valores homogéneos, o sea, monedas de igual poder adquisitivo.

Al hablar de operaciones financieras, las clasificaremos en: **OPERACIONES SENCILLAS Y COMPLEJAS**, permitiendo de este modo reunir las técnicas aplicadas a cada grupo.

La operación financiera es **Sencilla** cuando en ella existe el cambio de un solo capital por otro también único.

La operación financiera es **Compleja** si al menos una de las partes, los cobros o los pagos, los costos de inversión o los beneficios, se producen en dos o más momentos distintos.

La financiación de un automóvil en cuotas; la inversión en una empresa que rendirá beneficios anuales durante cierto tiempo o en plazo indefinido; las modernas operaciones de ahorro y préstamo para la adquisición de bienes: viviendas, autos, motos, electrodomésticos, etc., son ejemplos de **Operaciones Financieras Complejas**.

Vamos a desarrollar primero las operaciones sencillas, pues de ellas y de las técnicas aprendidas en ellas surgirá la metodología correspondiente a las operaciones complejas, constituidas esencialmente por las denominadas **RENTAS FINANCIERAS**.

Una misma operación, según la metodología utilizada para el análisis financiero, puede ser considerada sencilla o compleja, de manera que la distinción no es absoluta. Como ejemplo, podremos apreciar ello, después de desarrollar los temas de Amortización De Una Obligación con pago periódico de intereses y devolución del capital en una sola fecha, o en las diversas formas de perpetuidades o Rentas Perpetuas.

Ahora bien, hasta aquí, hemos hablado e introducido el concepto del Interés, ya sea como un rédito o beneficio, o como un costo a pagar por un capital ajeno, por el tiempo que lo usemos, pero no hemos establecido: ¿Cómo calcularlo en valores concretos?

Los métodos de cálculo del interés devengado por un capital nacen de una convención entre acreedor y deudor sobre la forma de hacer las operaciones aritméticas que permiten obtener el importe a percibir o pagar.

El hecho de que muchas veces el acreedor imponga las reglas de juego y el deudor se limite a aceptarlas o no, no quita que la metodología resulte convencional.

Puede ocurrir que no exista ningún método de cálculo del interés sino que se pacte directamente la suma a pagar por este concepto. Por ejemplo, un señor presta a otro \$10.000 conviniendo en que el segundo devolverá \$12.000 al cabo de tres meses. Aquí lo convenido no necesita ninguna operación aritmética para llevarlo a la práctica; simplemente, se ha acordado que por el uso del capital ajeno de \$10.000 en tres meses, el precio es de \$2.000.

La operación anterior es sustancialmente una operación financiera, aunque para su realización no requiera cálculo alguno. En posesión de técnicas adecuadas, se podrá en todo caso determinar: ¿cuál ha sido el costo del dinero en los tres meses?

No es corriente, sin embargo, que la convención tenga por objeto directamente el precio del dinero prestado o tomado durante cierto tiempo. Lo usual es convenir un precio por una dada unidad de capital en otra dada unidad de tiempo, que es la **Tasa de Interés** y luego el precio total se calcule mediante un método que también es convenido o sobreentendido.

Para poder calcular el interés en una operación es necesario entonces estar en posesión de los siguientes datos: **Capital, Tiempo, Tasa de Interés y Método de Cálculo**.

Todos estos datos resultan de una convención expresa o tácita entre acreedor y deudor.

Entre los métodos más comunes de calcular el interés de un capital están:

- a) **Teoría del Interés Simple (T. I. S.)**
- b) **Teoría del Interés Compuesto (T. I. C.)**

En el interés simple, suponemos que para un capital en juego (prestado o tomado en préstamo), a una determinada tasa y durante un cierto tiempo, el importe a abonar en concepto de interés es directamente proporcional a esas tres cantidades, es decir, al capital, a la tasa y al tiempo. Ello nos permite aplicar una fórmula elemental y fundamental, para resolver la cuestión.

En el interés compuesto, convenimos en la misma proporcionalidad anterior, pero, en períodos iguales, el interés devengado que queda en poder del deudor por no ser abonado, pasa a formar parte del capital, formando un nuevo capital y devengando, como tal, intereses en el período siguiente.

Conceptualmente estos dos métodos son uno solo, con los mismos principios. En el **Interés Simple**, el interés se paga al cabo de cierto tiempo, cualquiera él fuere, mientras que en el **Interés Compuesto** se acredita, que es una forma distinta de otorgar la propiedad al acreedor. Fácil es advertir que como todo crédito debe ser pagado en algún momento, el interés resulta siempre compuesto.

Desde el punto de vista operativo, en cambio, ambos métodos deben distinguirse, pues dan origen a operaciones matemáticas distintas.

Otros métodos de cálculo de interés serán también objeto de estudio, fundamentalmente aquellos que se aplican en la práctica o resultan de interés teórico, como el descuento bancario o comercial, el llamado comúnmente *interés directo* en la financiación en cuotas o **Sistema Argentino**, el interés continuo, etc.

Los métodos de cálculo del interés no pueden ser juzgados como justos o injustos, equitativos o no. El interés excesivo, llamado usura y considerado un delito, no surge del método empleado sino de la tasa real de la operación.

Lo que ocurre es que hay métodos que enuncian una tasa y resulta realmente otra muy distinta, obligando a que se posean las técnicas de análisis que permitan determinarla con la precisión deseada.

Podemos discutir si los métodos son o resultan más o menos científicos, y esa discusión podremos hacerla, una vez conocidos y estudiados los mismos. Por ésta razón, empezaremos el desarrollo de la materia, en todos los casos, describiendo las técnicas empleadas, tal como se dan en la práctica bancaria o comercial, para después realizar análisis y comparaciones entre ellas.

Un método de cálculo constituye por lo general un **sistema financiero**, entendiendo por tal un conjunto de **leyes financieras** que lo regulan y permiten dar valores concretos a cada una de las variables que intervienen.

IMPORTANTE:

Muchas veces en la práctica, un convenio de partes establece una operatoria financiera particular, sin que ello implique la definición de un sistema financiero que la comprenda, razón por la cual las variables que no hayan sido “convenidas” o pactadas, ofrecen posibilidades de conflicto por falta de precisión en el acuerdo de partes.

Las variables a que hacemos referencia son:

K_0 = Capital o Inversión que se toma o que se presta.

J = Tasa Nominal o pactada de interés, costo o beneficio, pagado o recibido por la utilización de un determinado capital o inversión (K_0).

n = Tiempo de la operación financiera, necesario para producir interés del capital o inversión (K_0).

$(J.n)$ = Combinación financiera de tasa y tiempo, para medir el verdadero interés de la operación financiera.

I = Interés: Costo o Beneficio de la operación financiera.

TASAS

1. VARIACIÓN ABSOLUTA DE UNA VARIABLE.

Nos ocuparemos de variables temporales, o sea, aquellas que asumen diferentes valores para diferentes momentos. En términos de funciones matemáticas, estamos suponiendo una función de dominio real a valores reales que escribimos como:

$$x = f(t)$$

pero nosotros preferimos seguir la convención habitual de señalar a la variable con un subíndice, de la siguiente forma:

$$x_{(t)}$$

Ejemplo:

Supongamos que $x_{(t)}$ mide, en millones de dólares, la exportación de carnes de la República Argentina, y que tomamos las estadísticas que proporciona la Junta Nacional de Carnes. De acuerdo a ellas:

$$\begin{aligned} x_{(1970)} &= 601,0 \\ x_{(1971)} &= 532,5 \end{aligned}$$

Es preciso distinguir entre el comienzo de un período y su culminación, lo que nos permite tener idea del cambio experimentado por la variable temporal que estudiamos. Para el comienzo se utiliza el subíndice (0) y para la culminación el subíndice (1). De acuerdo a esta convención, en el ejemplo anterior será:

$$\begin{aligned} x_{(0)} &= 601,0 \\ x_{(1)} &= 532,5 \end{aligned}$$

No perdamos de vista que los 601,0 millones de dólares acumulan la información de todo el año 1970 y entonces es una cantidad referida al fin de dicho año, pero ese momento es también el comienzo del año 1971, por ello consideramos a dicha cantidad como la que se registra en el momento inicial del período.

Si en lugar de un año nos interesa el trienio comprendido por los años 1970 y 1972, por ejemplo, tendríamos:

$$\begin{aligned} x_{(0)} &= 601,0 \\ x_{(1)} &= 845,3 \end{aligned}$$

siempre de acuerdo a las mismas fuentes.

El tomador de decisiones quiere saber de la variación de una variable en cierto período, en varios períodos, y, sobre todo, comparar la variación de diferentes variables. Resulta natural medir el aumento o disminución que sufrió la variable al pasar del momento (0) al momento (1), lo que conduce al concepto de VARIACIÓN ABSOLUTA, que se escribe: Δx (delta de equis)

y se define como: $\Delta x = x_{(1)} - x_{(0)}$

Debemos reconocer que esta medida (Δx) tiene una seria desventaja.

Supongamos que nos interesamos por la evolución de dos variables, ventas brutas del artículo A y ventas brutas del artículo B, en períodos comparables, digamos meses. Nos referiremos a las variables mencionadas como $x_{(t)}$ y $y_{(t)}$, respectivamente. Poseemos los siguientes datos, transmitidos por la oficina de ventas, para dos meses consecutivos (en miles de pesos):

$$\begin{array}{ll} x_{(0)} = 25.000 & y_{(0)} = 410.000 \\ x_{(1)} = 30.000 & y_{(1)} = 415.000 \end{array}$$

Si calculamos las variaciones absolutas, encontramos que no hay diferencia en el incremento bruto sufrido por ambas variables:

$$\Delta x = x_{(1)} - x_{(0)} = 5.000 \quad ; \quad \Delta y = y_{(1)} - y_{(0)} = 5.000$$

Pero es razonable buscar otro tipo de medida porque la variación absoluta trata de la misma manera a variables con muy diferente comportamiento.

2. VARIACIÓN RELATIVA DE UNA VARIABLE.

Lo que vamos a hacer es “atar” la variación de la variable con respecto a la información que se posee de ella en el momento inicial o en el momento final del período bajo estudio. En la práctica es frecuente atar al momento inicial (0) dicha variación.

Se define VARIACIÓN RELATIVA y se escribe: $\frac{\Delta x}{x_{(0)}}$

a la expresión: $\frac{x_{(1)} - x_{(0)}}{x_{(0)}}$

Aquí estamos atando la variación Δx al valor $x_{(0)}$. Si volvemos al ejemplo de las ventas de los artículos A y B, calculando las variaciones relativas, obtenemos:

$$\frac{\Delta x}{x_{(0)}} = \frac{5.000}{25.000} = 0,20 \quad \wedge \quad \frac{\Delta y}{y_{(0)}} = \frac{5.000}{410.000} = 0,0122$$

Conviene aprender a leer estos cocientes: el primero de ellos dice que al finalizar el período las ventas fueron superiores en 0,20 (20 %) unidades monetarias por cada unidad monetaria vendida al comienzo del período ó 20 unidades por cada 100 unidades. Análogamente, el segundo cociente dice que el incremento en las ventas del artículo B es de 0,0122 (1,22 %) unidades monetarias por cada unidad monetaria ó 1,22 unidades por cada 100 unidades. Esta medida es más indicativa que la variación absoluta, porque permite comparaciones y consecuentemente, correcciones a la política de ventas del empresario. En nuestro ejemplo, el producto A tiene un desempeño superior al del producto B.

A cerca del tanto por uno y del tanto por ciento:

La definición de tasa permite escribir: $\frac{\Delta x}{x_{(0)}} = \alpha = \frac{\alpha}{1}$

y de acuerdo a ello podemos decir que:

por cada $x_{(0)}$ unidades del comienzo del período se observa un aumento o una disminución de Δx unidades.

Pero también cabe expresarlo así:

por cada unidad del comienzo del período se observa un aumento o una disminución de α unidades.

En la definición de variación relativa conviene recordar esta última manera de leerla. De modo que la variación relativa es un tanto por uno.

Cuando en la definición consideramos lo que le ocurre a 100 unidades de la variable, entonces estamos en el tanto por ciento. Para expresar el tanto por ciento (%) basta hacer: $\frac{\Delta x}{x_{(0)}} \bullet 100$

La Variación Relativa De Una Función Se Llama **TASA**.

Hay una diferencia importante entre la variación absoluta y la relativa o tasa. Mientras que la primera es un número acompañado de unidad de medida, la segunda es un número a secas, independiente de unidades, y este hecho le confiere valor para establecer comparaciones entre variables heterogéneas. Quienes hayan tomado un curso de Estadística recordarán que el coeficiente de variación derivaba su utilidad de la misma característica. Se trata de un número puro, que permite así estudiar variables de diferentes distribuciones de probabilidad.

3. ALGUNOS EJEMPLOS DE TASAS.

3. 1. TASA DE INFLACIÓN.

Cuando la variable temporal es un índice de precios

$$P = f(t) \quad \text{ó} \quad P(t)$$

entonces la variación relativa de dicho índice es la tasa de inflación:

$$\pi = \frac{\Delta P}{P_{(0)}} = \frac{P_{(1)} - P_{(0)}}{P_{(0)}}$$

Si tomamos el Índice De Precios Mayoristas, Nivel General, que para los meses de Enero y Febrero del año 1983, por ejemplo, tenía los siguientes valores:

$$\begin{aligned} P_0 &= 18.115.418,4 \\ P_1 &= 20.545.859,5 \end{aligned}$$

entonces la tasa de inflación que se experimentó en Febrero / 83, fue:

$$\pi = \frac{20.545.859,5 - 18.115.418,4}{18.115.418,4} = 0,13416$$

Que expresada porcentualmente arroja:

$$\pi = 13,42\% \text{ Mensual}$$

Aprovechemos la definición de tasa de inflación para obtener una expresión que utilizaremos con frecuencia en otras partes del curso:

$$\pi = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - \frac{P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - 1$$

Entonces: $\pi + 1 = \frac{P_1}{P_0}$ que escribimos:
$$P_1 = \frac{1 + \pi}{P_0}$$

A esta expresión se la conoce como: “**Coefficiente Corrector**”.

3. 2. **TASA VENCIDA DE INTERÉS.**

Si Usted al comienzo de un período tiene una cantidad de dinero K_0 y alquila su uso a una entidad financiera mediante un depósito a 30 días – para pensar en términos concretos – dicha institución, al finalizar el período se compromete a devolverle K_1 unidades monetarias, donde $K_1 > K_0$, puesto que en caso contrario Usted se quedaba con la plata en el bolsillo. Lo que queremos decir es que Usted realiza un pacto, el cual supone una “ganancia” por el alquiler de su capital. Éste es un rasgo típico de las operaciones financieras, se llevan a cabo de modo ***no — gratuito***, persiguen un beneficio o lucro.

Concluida la operación Usted desea saber cuál fue el rendimiento por cada peso depositado. Esto es, la tasa de interés. La llamamos vencida porque Usted cobra o retira el rendimiento al cabo del período, vencido el plazo de la operación.

Formalmente:
$$J = \frac{K_1 - K_0}{K_0}$$

3. 3. **TASA ADELANTADA DE INTERÉS.**

Si Usted tiene un pagaré firmado por un cliente, el cual vence al finalizar cierto período, pero por diversos motivos necesita dinero hoy y aquí, puede realizar operaciones de “descuento” sobre la cantidad que hubiera obtenido de esperar a la culminación del período.

O sea, Usted tiene la promesa de una cantidad N_1 de dinero futuro, pero hoy y aquí una institución financiera le entrega una cantidad razonablemente menor, digamos V_0 .

Concluida la operación Usted desea determinar cuál fue la quita sufrida por cada unidad monetaria futura. Pero esto es una variación relativa.

Se define Tasa de Interés Adelantada a la expresión:
$$d = \frac{N_1 - V_0}{N_1}$$

Y, en la práctica a esta tasa se la llama de descuento. Pronto vamos a analizar con detalle la relación básica y profunda entre ambas tasas: la adelantada y la vencida. Si observa a las dos definiciones hallará una semejanza sospechosa.

3. 4. TASA DE CRECIMIENTO DE UNA CANASTA DE BIENES.

Vamos a pensar en una canasta de bienes, por ejemplo, la considerada por el I. N. D. E. C. para el consumo de las unidades familiares. La variable temporal $C_{(t)}$ medirá ahora la cantidad de bienes de la canasta en el momento (t). Si calculamos su variación relativa tendremos: $r = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$ que se conoce como Tasa Real De Interés. Pronto nos ocuparemos de ella y veremos que en un contexto inflacionario adquiere gravitación especial.

Aprovechemos la definición para obtener una relación que nos será imprescindible en el próximo tema:

$$r = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

$$\text{O sea: } \frac{C_1}{C_0} = 1 + r$$

A esta expresión se la conoce como “Coefficiente Corrector”.

4. RELACIÓN ENTRE: TASA DE INTERÉS, TASA DE INFLACIÓN Y TASA REAL DE INTERÉS

Imaginemos que en el momento (0) Usted tiene una canasta de bienes. Piense, si así lo desea, en un solo bien, o en una combinación de bienes que están medidos en unidades de canasta. Cuando en ese momento Usted levanta inventario, cuenta con C_0 unidades de dicho bien.

A continuación decide monetizarse, esto es, ir al mercado, vender todos los bienes y quedarse con dinero a cambio de ellos. En ese momento el índice de precios tiene un valor P_0 y Usted recibe, en unidades monetarias, la cantidad $K_0 = C_0 \cdot P_0$

Aquí decide colocar esa cantidad en una entidad financiera, que le garantiza mediante un certificado de depósito, que al cabo de la operación Usted recibirá (J) unidades monetarias por cada una de las depositadas. Por medio de una regla de tres simple, puede comprobar que le están garantizando $[K_0 \cdot J]$ unidades monetarias por el depósito inicial.

Esto quiere decir que al finalizar la operación, retira la cantidad que colocó más un rendimiento. O sea, que Usted tendrá derecho a la cantidad: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot J \Rightarrow K_1 = K_0 \cdot (1 + J)$ unidades monetarias.

Que ocurre ahora si volvemos a bienes, o sea que nos desmonetizamos. Quiero decir, vamos al mercado, compramos cuanto podemos de la canasta original de bienes.

Para ello habrá que considerar la magnitud del nivel de precios en ese momento: P_1 , y la cantidad de canasta que compraremos C_1 , vendrá dada por la ecuación: $K_1 = C_1 \bullet P_1$, y manipulando algebraicamente:

$$K_1 = C_1 \bullet P_1 = K_0 \bullet (1 + J)$$

Pero: $K_0 = C_0 \bullet P_0$, por lo tanto:

$$C_1 \bullet P_1 = C_0 \bullet P_0 \bullet (1 + J)$$

Y, dividiendo ambos miembros por $C_0 \bullet P_0$

$$\frac{C_1}{C_0} \bullet \frac{P_1}{P_0} = 1 + J$$

Recordemos que en los ejemplos 1 y 4 del punto anterior habíamos obtenido dos coeficientes correctores:

$$\frac{C_1}{C_0} = 1 + r \qquad \frac{P_1}{P_0} = 1 + \pi$$

Y, si los llevamos a la expresión de arriba quedará:

$(1 + r) \bullet (1 + \pi) = 1 + J$

Que es la relación prometida.

Este resultado merece algunas consideraciones:

- a) Cuando pactamos una operación financiera, la tasa (J) es nominal, contractual, por lo cual no cabe que sea negativa. Ello equivaldría a que debemos pagar por permitirle a la entidad financiera usar de nuestro dinero.
- b) Las tasas de inflación (π) y la real (r) pueden adoptar valores negativos, situación que alude a caída en el Índice de Precios, disminución o achicamiento de la canasta, respectivamente.
- c) Cuando en los medios de prensa dicen que: “*el rendimiento de determinada operación ha sido negativo en cierto período*”, aluden a la tasa real de interés (r), y no a la tasa nominal (J) de interés. La tasa real deflaciona, filtra los efectos de la inflación, sobre la tasa nominal.
- d) Si desarrollamos la expresión anterior, obtenemos:

$1 + \pi + r + r\pi = 1 + J$; de donde: $J = r + \pi + (r\pi)$, cuando ($r\pi$) es despreciable, entonces puede adoptarse: $r = J - \pi$ como una razonable aproximación a la tasa real. Esto supone una tasa de inflación (π) muy reducida, que no siempre fue el caso de nuestro país. Por lo tanto, cuando usted deba calcular la tasa real use:

$$(1 + r) \bullet (1 + \pi) = 1 + J \Rightarrow (1 + r) = \frac{1 + J}{1 + \pi} \Rightarrow$$

$$r = \frac{1 + J}{1 + \pi} - 1 \Rightarrow r = \frac{J - \pi}{1 + \pi}$$

Observe la
Diferencia

En estos momentos, en nuestro país, se fundamentan las decisiones de gasto o inversión en los valores nominales. De donde la adquisición de cierto bien, la aceptación o rechazo de un empleo, se llevan a cabo pensando en términos de los billetes o unidades monetarias que están en juego.

Cuando las unidades económicas, sean familias, empresas o el propio gobierno, proceden de éste modo sin considerar las variaciones en los precios, decimos que las unidades económicas operan con **ILUSIÓN MONETARIA**.

La exposición prolongada y agresiva de la inflación, en países como el nuestro, han desarrollado un proceso de aprendizaje, por medio del cual las unidades económicas modifican su comportamiento tomando sus decisiones sobre los valores nominales pero en términos de las expectativas de inflación que perciben. El inversor buscará entonces aquellas opciones que le aseguren rendimientos reales positivos, caso contrario “no juega”, orientándose a otro tipo de operaciones que le prometan tales rendimientos positivos. Esas operaciones se relacionan con la tenencia de activos que se protegen de la inflación; y que en el momento de su venta o realización, proporcionan algo más que la mera conservación del valor adquisitivo del capital originario. Entre las operaciones aludidas se encuentra el comercio de obras de arte, de metales preciosos o estratégicos, la transacción de inmuebles o de divisas.

5. RELACIÓN ENTRE LA TASA DE INTERÉS VENCIDA Y LA TASA DE INTERÉS ADELANTADA.

Vamos a imaginar que estamos detrás del mostrador de una entidad financiera. Viene un cliente a descontar un pagaré que le firmara una empresa que le compró mercadería. Para simplificar la argumentación nos bastará suponer que el importe futuro que dicho documento promete es de una unidad monetaria. Posteriormente levantaremos este supuesto. Habitualmente la operación que propone el cliente se justifica por algún apremio de caja que enfrenta hoy y aquí.

Nosotros retenemos el documento que tiene como valor futuro una unidad monetaria y le entregamos: $(1 - d)$ unidades monetarias, donde (d) es la tasa de descuento.

Pensemos ahora que el cliente nos ha ocultado deliberadamente su motivación, y que ésta fuera especulativa. A manera de consuelo podríamos decirnos que desde el momento que hemos cobrado nuestra tasa de descuento (d) , lo que decida hacer con el dinero es cuestión que le atañe al cliente y no nos incumbe.

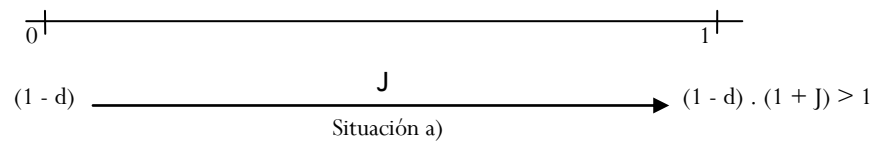
Sin embargo, sigamos al cliente. Acaba de ingresar en una cercana entidad financiera, competidora nuestra. Allí deposita el dinero que el adelantamos, a una tasa (J) de interés vencida.

Estudiemos con cierto detalle, las tres únicas alternativas que se presentarán cuando nuestro cliente retire, al cabo del período, su depósito inicial. Obviamente, para que el relato tenga sentido, el período del depósito es el mismo que necesitaba el pagaré para madurar de modo que las operaciones resulten comparables.

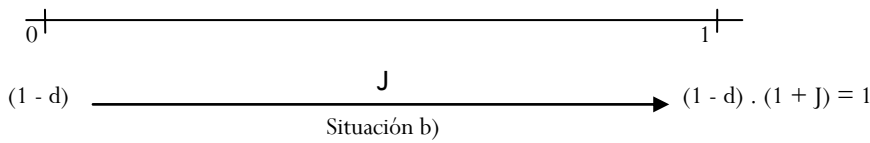
La situación a) posibilita que nuestro cliente “arme una bicicleta”, de donde se sigue que nosotros se la hemos subsidiado. La tentación será demasiado grande para asumir el rol del cliente y “armar bicicletas” con nuestros propios recursos.

La situación b) es de indiferencia, porque de una u otra manera, el cliente recupera el valor futuro del documento.

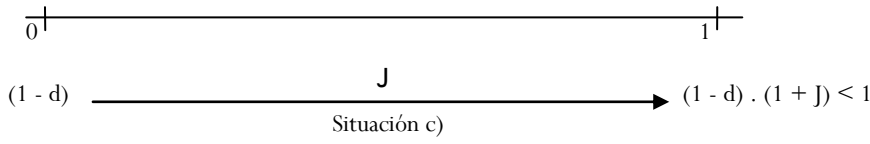
La situación c) lo perjudica. Es el caso habitual, que se justifica por la urgencia de caja y entonces estará asumiendo un costo de financiación.



a) La tasa (J) prometida le permite ganar, al fin del período, una cantidad mayor que el valor futuro del documento.



b) La tasa (J) prometida le permite ganar al final del período, una cantidad igual al valor futuro del documento.



c) La tasa (J) prometida le permite ganar al final del período, una cantidad menor que el valor futuro del documento.

El relato enseña que no podemos fijar arbitrariamente a la tasa (d), porque podríamos estar generando la situación a). De donde se sigue que la tasa de la situación b) es el valor mínimo que deberíamos adoptar. ¿Por qué?

De acuerdo a la situación b): $(1 - d) \cdot (1 + J) = 1$; si permitimos a (d) tomar un valor más pequeño, entonces $(1 - d)$ es más grande y el producto: $(1 - d) \cdot (1 + J)$, es mayor que uno, que conduce a la situación a).

Si permitimos a (d) tomar un valor más grande, entonces $(1 - d)$ es más pequeño y el producto: $(1 - d) \cdot (1 + J)$, es menor que uno, que conduce a la situación c).

En suma, conocida la tasa de interés (J), tenemos el valor de la tasa de descuento (d) que produce:

$$(1 - d) \cdot (1 + J) = 1$$

Por un simple despeje como sigue:

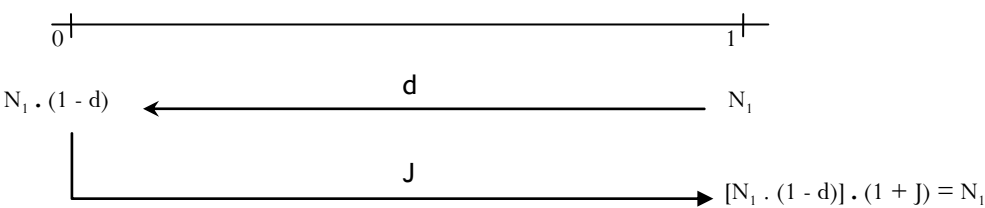
$$1 - d = \frac{1}{1 + J} \quad \Rightarrow \quad d = 1 - \frac{1}{1 + J};$$

$$d = \frac{1 + J - 1}{1 + J} \Rightarrow \boxed{d = \frac{J}{1 + J}}$$

Y, esto posibilita que se calcule la tasa de descuento (d) a aplicar, por sobre este valor matemático.

Cuando una tasa de descuento (d) y una tasa de interés (J) cumplen la relación: $(1 - d)(1 + J) = 1$, se dice que son recíprocamente equivalentes. O simplemente *equivalentes*.

La argumentación es completamente general y básica. Si en lugar de una unidad monetaria tuviéramos N unidades monetarias, la situación sería análoga. Vamos a comprobarlo analítica y gráficamente.



Nos entregan $[N_1 \cdot (1 - d)]$ que puestos a capitalizar a la tasa (J) nos proporciona: $[N_1 \cdot (1 - d)] \cdot (1 + J)$, y si queremos recuperar la cantidad futura esperada, la tasa (J) debe ser capaz de producir la situación: $[N_1 \cdot (1 - d)] \cdot (1 + J) = N_1$ y simplificando $(1 - d) \cdot (1 + J) = 1$ que es la relación fundamental.

Naturalmente, para estas operaciones existen “costos de entrada y de salida”, como los gastos de sellado, las comisiones, y gastos diversos, pero podemos suponer que las tasas (J) y (d) los están absorbiendo, para no oscurecer con detalles el razonamiento o argumento.

Ejemplo:

La tasa vencida (J) da origen a operaciones llamadas **VENCIDAS**, en las cuales el interés o rendimiento total de la operación se cobra al finalizar la misma. La tasa adelantada (d) da origen a operaciones llamadas **ADELANTADAS**, donde el rendimiento total o interés de la operación se cobra por anticipado.

De acuerdo a esto, supongamos que tomamos un préstamo por 1.000 unidades monetarias y se estipula una tasa de interés del 20 %. Si adoptamos la modalidad vencida de la operación, nos entregan en el momento (0) la cantidad de 1.000 unidades monetarias y nos comprometemos a devolver en el momento (1) la cantidad de 1.200 unidades monetarias.

Si adoptamos la modalidad adelantada, nos entregarán en el momento (0) la cantidad de 800 unidades monetarias y devolveremos la cantidad de 1.000 unidades monetarias.

Si ahora nos preguntamos por la ventaja de una sobre la otra, diríamos que ambas cuestan lo mismo: 200 unidades monetarias. Pero el razonamiento es sospechoso, porque no es lo mismo antes que después. Lo que debemos hacer es transformar un poco el problema para comparar así ambas alternativas.

Vamos a suponer que en lugar de las 1.000 unidades monetarias nos prestan 800 de ellas, y nos preguntamos entonces, qué tasa vencida nos restituye, al cabo del período, las 1.000 unidades monetarias.

La respuesta es sencilla:

$$800 \bullet (1+J) = 1.000 \Rightarrow 1+J = \frac{1.000}{800} \Rightarrow J = \frac{1.000 - 800}{800} = 0,25$$

Y multiplicando: $(1+0,25) \bullet (1-0,20) = (1,25) \bullet (0,80)$

Obtenemos que el producto da $(1+J) \bullet (1-d) = 1$

De este modo, la tasa (J) hallada es equivalente a la tasa adelantada (d) del 20 %. Nos hemos aproximado al concepto de equivalencia, en términos de una operación de créditos. Incidentalmente las operaciones como éstas, se llaman **ACTIVAS**, mientras las que involucran depósitos, son llamadas **PASIVAS**.

OTRA DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA FUNDAMENTAL.

Sabemos, por haberlo visto en el punto 3. 3., que la tasa adelantada se define como:

$$d = \frac{N_1 - V_0}{N_1}$$

$$d = \frac{N_1}{N_1} - \frac{V_0}{N_1} = 1 - \frac{V_0}{N_1}$$

Y, de esto sigue que: $1 - d = \frac{V_0}{N_1}$

Análogamente, de la definición de tasa vencida tenemos que:

$$J = \frac{K_1 - K_0}{K_0}$$

$$J = \frac{K_1}{K_0} - \frac{K_0}{K_0} = \frac{K_1}{K_0} - 1$$

Y, de esto sigue que: $1 + J = \frac{K_1}{K_0}$

Por otra parte es cierto que: $\frac{K_1}{K_0} \bullet \frac{K_0}{K_1} = 1$

Y, utilizando los resultados anteriores:

$$(1+J) \bullet (1-d) = 1, \text{ que es la relación buscada.}$$

TASAS ACTIVAS DE INTERÉS.

Son las tasas de interés que cobran las entidades financieras por los préstamos que otorgan.

TASAS PASIVAS DE INTERÉS.

Son las pagadas al inversor. Generalmente son las que se indican en las pizarras de los bancos. Por montos grandes se pueden obtener tasas superiores.

6. ECONOMÍA Y MATEMÁTICA FINANCIERA.

El Sector Financiero de una economía está compuesto por:

- a) **Instrumentos Financieros.**
- b) **Instituciones Financieras.**
- c) **Mercado Financiero.**

Comentamos un poco el uso de estos términos. Por **Mercado** entendemos todo lugar donde se realiza un comercio (oferta y demanda de bienes y servicios); cuando se comercia con **Títulos Financieros**, se llama al mismo: **Mercado Financiero**. En general, cuando se habla de títulos financieros, pensamos en futuros derechos sobre recursos reales, y se espera que hasta el momento del vencimiento produzca intereses a su *tenedor*. Las **Instituciones Financieras** son las encargadas de comprar y vender los títulos financieros.

Al sector financiero se le reconoce la función económica básica: reunir los ahorros de las unidades de gasto superavitarias y canalizarlos a las unidades de gasto deficitarias.

UNIDADES DE GASTO DEFICITARIAS Y SUPERAVITARIAS.

Se dice que una unidad de gasto es superavitaria, cuando prefiere gastar en consumo de bienes o servicios, o en bienes de inversión, menos de sus actuales ingresos, a la tasa presente de interés de mercado.

Se dice que una unidad de gasto es deficitaria, cuando prefiere gastar en consumo de bienes o servicios, o de bienes de inversión, más de sus actuales ingresos, a la tasa presente de interés de mercado.

De acuerdo a esto, se acepta que las tres opciones básicas que enfrenta una unidad de gasto superavitaria son:

- a) Guardar el excedente en saldos monetarios.
- b) Volver a comprar o rescatar los títulos financieros no amortizados hasta ese momento, que vendiera cuando era una unidad de gasto deficitaria.
- c) Comprar títulos a las unidades de gasto deficitarias cediendo de ese modo y temporalmente, su poder de compra.

Análogamente, la conducta básica de una unidad de gasto deficitaria será:

- a) Reducir sus saldos monetarios.
- b) Vender títulos que comprara cuando era una unidad de gasto superavitaria.
- c) Emitir títulos para ofrecer a las actuales unidades de gasto superavitarias.

De modo que a los títulos financieros los crean las unidades de gasto deficitarias que los venden a las unidades de gasto superavitarias; el mercado correspondiente se denomina **PRIMARIO**.

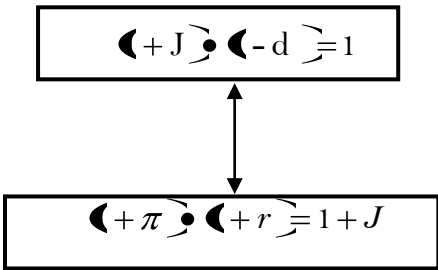
Por razones de costo de información, especialización, riesgos, eficiencia, surgen intermediarios, los que emiten a su vez títulos capaces de atraer a un mayor número de unidades para las operaciones financieras.

Esto resultará posible en la medida que se negocien títulos con diferentes plazos y rendimientos, pero especialmente que no tengan precios limitativos para pequeñas unidades. El mercado correspondiente se llama **SECUNDARIO**.

Lo que la **MATEMÁTICA FINANCIERA** hace es proporcionar recursos matemáticos para que la *operación financiera*, cualquiera sea ésta, se lleve a cabo con claridad para las partes, mediante la precisa expresión de todas sus etapas.

7. RESULTADOS BÁSICOS.

Podemos afirmar que las dos relaciones siguientes:



Que obtuvimos, son los cimientos del curso. Al punto que la sucesión de temas que serán desarrollados, consiste en una detallada discusión alrededor de estos resultados.

Vayan estas líneas de “Introducción al Estudio del Cálculo Financiero”, como un sentido y merecido homenaje, al Dr. Mario Atilio Gianneschi, Ex Profesor Titular de Matemática Financiera, en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Nordeste, Resistencia, Chaco, quién fue en vida un ejemplo de “Docencia y Decencia”, valores que lamentablemente en la actualidad van quedando en desuso.

Ing. Ernesto Trejo (h)
Prof. Adj. De Matemática Financiera